TRABALHO DE GRADUAÇÃO

OTIMIZAÇÃO DE UM PORTFÓLIO DE INVESTIMENTOS UTILIZANDO O MODELO DE MÉDIA AJUSTADA PELA VARIÂNCIA E ESTRUTURAS PREDITIVAS

Lucas Lôbo Ataide

Pedro Vieira Kluppel Carrara

Brasília, Dezembro de 2020

UNIVERSIDADE DE BRASÍLIA

FACULDADE DE TECNOLOGIA

UNIVERSIDADE DE BRASILIA
Faculdade de Tecnologia

TRABALHO DE GRADUAÇÃO

OTIMIZAÇÃO DE UM PORTFÓLIO DE INVESTIMENTOS UTILIZANDO O MODELO DE MÉDIA AJUSTADA PELA VARIÂNCIA E ESTRUTURAS PREDITIVAS

Lucas Lôbo Ataide

Pedro Vieira Kluppel Carrara

Relatório submetido ao Departamento de Engenharia Elétrica como requisito parcial para obtenção do grau de Engenheiro Eletricista

Banca Examinadora

Prof. José Edil Guimarães de Medeiros ______________________
Orientador

Prof. Marcelino Monteiro de Andrade ______________________
Examinador Interno

Prof. Geovany Araújo Borges ______________________
Examinador Interno

Eng. Breno Rodrigues Brito ______________________
Examinador Externo

Dedicatórias

Dedico este trabalho primeiramente ao bom Deus, para cuja glória todas as coisas foram feitas, e a toda minha família e amigos que sempre foram meu porto seguro em todas as alegrias e tribulações ao longo da minha vida.

Lucas Lôbo Ataide

Dedico esse trabalho a meus pais e a Deus que me apoiaram em toda essa caminhada..

Pedro Vieira Kluppel Carrara

Agradecimentos

A realização desse trabalho é um fruto da colaboração direta e indireta de diversas pessoas que contribuíram dos mais diversos modos para que eu chegasse onde estou hoje. Gostaria de dizer, no entanto, que é inviável citar individualmente todas essas pessoas que de alguma forma contribuíram ao longo da minha vida. Em certos casos, considero que tais sujeitos não estejam cientes de como foi importante para mim tal colaboração, de tal modo que é fundamental para mim que esse suporte seja reconhecido.

Dito isso, gostaria de em primeiro lugar agradecer ao bom Deus que me concedeu o dom da vida, bem como todos os outros talentos que possuo, sem mesmo que eu fosse merecedor, na esperança de que eu possa fazer valer desses talentos e devolver bons frutos quando a hora chegar.

Agradeço imensamente a toda a minha família sem a qual não estaria aqui. Em especial, minha mãe Mila que me criou com grande zelo e empenho, proporcionando que eu fosse a pessoa que sou hoje, meu pai José Luiz por todo seu companheirismo e carinho, também ao meu padrasto, Rodrigo, e minha madrasta, Rejane, que chegaram depois, mas se mostraram parte fundamental da minha vida, e minha irmã, Maitê, que sempre esteve ao meu lado em todos os momentos.

Ademais, agradeço especialmente ao meu caríssimo diretor espiritual e amigo, padre Francisco Lopes, por ter me motivado e inspirado ao longo do último ano, além de todas as orações. Também, gostaria de manifestar minha gratidão ao também grande amigo padre Ângelo Senchulke por todos os conselhos e reflexões que me propiciou.

Deixo também aqui minha gratidão ao meu orientador José Edil Guimarães de Medeiros bem como ao meu co-orientador Breno Rodrigues Brito por todo o empenho em ajudar a construir o presente trabalho.

Uma parte fundamental dessa caminhada foi sem dúvida todos os meus amigos que de algum modo e em algum momento me inspiraram a ser quem sou hoje. Nesse sentido, vale destacar a importância e contribuição do grande amigo Luiz Gustavo Cerveira Braz que esteve ao meu lado durante grande parte dessa caminhada, contribuindo tanto socialmente como academicamente para que eu chegasse até aqui.

Deixo também meu agradecimento aos meus sócios e colegas da Voga Invest pelo apoio e compreensão durante todo o desenvolvimento desse trabalho.

Por fim, mas definitivamente não menos importante, fica aqui meu agradecimento ao meu padrinho e melhor amigo, Pedro Vieira Kluppel Carrara. Te agradeço por todos os momentos ao longo desses últimos cinco anos e por tudo que você contribuiu para que eu fosse quem sou hoje. Obrigado por todo seu empenho, cobrança e dedicação a esse trabalho. Cada dia ao seu lado reforça a certeza que fiz a escolha certa de te ter do meu lado.

Lucas Lôbo Ataide

O referente trabalho só foi possível com a contribuição de várias pessoas que foram essenciais na minha caminhada e me ajudaram a me tornar a pessoa que sou hoje. Existem muitas pessoas que mereciam ser citadas no artigo, com suas suas contribuições profissionais, sociais e acadêmicas.

Portanto, gostaria primeiramente de agradecer a Deus que me deu a vida e me apoiou em todas as realizações que conquistei e me levantou em todos os momentos difíceis que passei.

Em seguida, expresso imensa admiração aos meus pais André e Simone que me criaram e me apresentaram boa parte das coisas que sei. Gostaria de dizer que eu vos amo e que eu não conseguiria nada na vida sem a contribuição deles.

Gostaria de agradecer também ao meu irmão Bernardo por quem tenho enorme apreço. Um modelo de profissional e que muito me ensina com o seu jeito verdadeiro, sincero e esforçado.

Um agradecimento especial também a Daniel Cambraia, sócio fundador da Voga Invest que me apresentou boa parte dos conhecimentos que tenho hoje e me ensinou a acreditar nos meus sonhos colocando foco e determinação em tudo que faço. Além de meu chefe é um grande amigo que sei que posso contar nos momentos mais difíceis.

A minha próxima leva de agradecimentos vai ao meu afilhado especial Vitor Resende que veio a falecer este ano, vítima de depressão. Este ano estive muito atarefado, assim não pude ajudá-lo e infelizmente veio a difícil notícia. Tenho certeza que ele está rezando por mim e torcendo por essa realização em especial.

Outra leva de agradecimentos é especial ao meu orientador José Edil Guimarães e ao engenheiro Breno Rodrigues Brito por todas as reuniões que fizemos juntos para chegar a uma boa conclusão no trabalho. A escolha do tema e todas as dúvidas foram solucionadas com a proatividade dos dois referidos.

Ainda, dedico o artigo também aos meus amigos da paróquia São Pedro de Alcântara e do meu antigo colégio, o Sigma, que me ajudaram a passar por esse momento difícil e são responsáveis pelas minhas melhores lembranças.

Por fim, faço meus agradecimentos ao Lucas por toda sua garra e empenho no presente trabalho. Até o último instante você procurava encontrar as soluções dos problemas e me ajudava em todas as dificuldades. É um orgulho imenso tê-lo como afilhado e como amigo para levar ao longo de toda minha vida.

Pedro Vieira Kluppel Carrara

RESUMO

O objetivo do trabalho é primeiramente mostrar que a otimização baseada no portfólio de Markowitz é inconsistente, pois utiliza o retorno aritmético como o retorno do portfólio, logo deve ser feito uma correção do retorno pela variância para melhor estimar os resultados do portfólio. O outro problema do modelo de Markowitz é que ele utiliza dados passados para calcular o retorno esperado, embora dados passados não refletem comportamento futuro. Utiliza-se então uma estrutura preditiva baseada nos dados de indicadores financeiros para cálculo do retorno esperado. A alavancagem do sistema será dada por uma análise com um quarto do critério de Kelly. Por fim, realiza-se uma análise de risco manipulando alguns indicadores como: Monte Carlo, value at risk, correlação. Os resultados mostram que o modelo possui um ajuste de retorno estimado melhor que o de Markowitz e que a possibilidade de ganho com a estratégia proposta é bem acima do benchmark assumido.

Palavras Chave: Portfólio de Markowitz, Ajuste de Variância, Monte Carlo, P/L preditivo, Alavancagem, Critério de Kelly.

ABSTRACT

The purpose of this project is to firstly show that the method of portfolio optimization based on Markowitz's method is inconsistent, since it utilizes a mean average return as an approximation to the portfolio's total return. Hence, a correction must be made utilizing the portfolio's variance in order to better estimate the portfolio's true return. Another problem of the Markowitz's method is that it utilizes past data to estimate the future return, even though past performance doesn't necessarily reflect on future behavior. Therefore, a predictive structure based on financial indicator's data is utilized to estimate the portfolio's future return. The portfolio's leverage is given by an analysis taking in consideration a quarter of the Kelly Criterion. Finally, a risk analysis is made via some known methods as value at risk and correlation parameters, and a Monte Carlo simulation. The results show that the model has a much better adjusted return estimation and that the gain possibility of with the proposed strategy is well above the assumed benchmark.

Keywords: Markowitz Portfolio, Variance Correction, Monte Carlo, Future P/E, Leverage, Kelly Criterion.

SUMÁRIO

LISTA DE FIGURAS

LISTA DE TABELAS

LISTA DE SÍMBOLOS

Símbolos Gregos

α	Ajuste na variância na fórmula de aproximação do retorno geométrico real
β	Ajuste do retorno na fórmula de aproximação do retorno geométrico real
α_a	Valor Acima do Esperado de Retorno
β_a	Estimador de risco dos ativos
σ	Volatilidade de Determinado Ativo

Siglas e Abreviações

ABNT	Associação Brasileira de Normas Técnicas
CAPM	Modelo de Precificação de Ativos
CDI	Certificado de Depósito Interbancário
K	Fração apostada no critério de Kelly
NEAR MONEY	Ativos de alta liquidez que facilmente são convertidos em valor monetário
S	Sharpe Ratio
TIMING	Tempo de entrada nas operações
VOL	Volatilidade

Capítulo 1

Introdução

Desde seus primórdios, o mercado financeiro foi visto como uma forma rápida e eficiente de gerar riquezas. O que inicialmente era visto como um ambiente para facilitar a participação de investidores em diferentes tipos de negócios e empresas para investidores finais, e uma forma de arrecadar recursos para expansão e crescimento das empresas que se tornavam listadas em bolsas de valores, ganhou ao longo de sua história um forte caráter especulativo, além de agilidade e liquidez. Com isso, surgiu também o desafio de aprender a navegar nesse ambiente e compreender suas dinâmicas.

O mercado financeiro sempre foi um desafio para analistas e investidores, entretanto, o cenário atual, que conduziu a taxa básica de juros brasileira (Selic) para sua mínima histórica, dificultou ainda mais a tomada de decisões. Até o ano de 2018 no Brasil, era muito simples obter boa rentabilidade com elevada segurança nos investimentos, devido às altas taxas de juros que o país apresentava. Recentemente, no entanto, o investidor foi obrigado a migrar para investimentos com maior risco, para manter a rentabilidade de seus investimentos.

Entender o perfil de cada investidor, é essencial para analisar o risco que ele deve correr em suas aplicações financeiras. Quanto mais conservador o cliente, maior o montante financeiro aplicado em ativos com menor risco, como títulos públicos federais e certificados de depósito bancário, entre outros ativos de renda fixa. Investidores considerados mais agressivos tendem a possuir um percentual maior de seu portfólio aplicado em ativos de renda variável, como aqueles listados em bolsas de valores. A diversificação pode ser uma ferramenta bastante útil para diminuir o risco dos investimentos e maximizar o retorno. Essa estratégia exige a escolha de ativos que reajam de forma diferente às circunstâncias de mercado. Por exemplo, por mais que uma ação possua maior rentabilidade a longo prazo, é essencial um ativo de renda fixa para reduzir o risco do investimento. Principalmente no mercado de ações, é essencial diversificar os investimentos em empresas de diferentes setores para impedir que uma notícia vinculada aquele setor em específico atrapalhe a rentabilidade de todos os papéis da carteira.

Outra possibilidade de diminuir o risco de um investimento, é através da utilização de modelos quantitativos. O uso da tecnologia no investimento elimina seu risco emocional, pois a tomada de decisão vem de algum algoritmo previamente programado e assim o investidor não fica pensando sobre a hora de entrada nas decisões. O próprio algoritmo determina o momento de entrada e saída em qualquer transação, segundo algum modelo matemático previamente estipulado e testado pelo investidor.

A velocidade de execução de uma ordem pelo modelo quantitativo, quando bem programado, é muito maior, fazendo com que o investidor opere mais rápido e encontre o timing de entrada nas operações. Por mais que existam grandes vantagens nesse modelo, é essencial que o investidor possua amplo conhecimento de qual programação irá utilizar, para realizar todos os testes de risco possíveis e impedir que erros no código do programa possam custar boa parte do capital investido nas operações.

1.1 Definição do problema

Dentro do contexto apresentado, surge o desafio de aprender a tirar o maior proveito das oportunidades que se mostram diariamente. Ao longo da história, diversos analistas e investidores desenvolveram diferentes estratégias qualitativas e quantitativas visando esse objetivo.

Uma das mais conhecidas e utilizadas foi proposta pelo economista americano Harry Markowitz, que apresentou um método para montar portfólios de investimento, composto por diferentes ativos. A estratégia de Markowitz consiste em utilizar dados históricos de retorno e volatilidade de cada ativo, a fim de obter uma fronteira eficiente que o retorno fosse máximo para cada nível de risco.

A teoria clássica de Markowitz, no entanto, peca em alguns aspectos que deterioram os resultados obtidos, como, por exemplo, ao utilizar uma média aritmética simples em um ambiente de juros compostos. Esse fato resulta em um sobre-desvio no resultado final, o que não é desejável.

1.2 Objetivos do projeto

Diante disso, o objetivo do presente trabalho consiste em realizar uma análise do modelo de Markowitz em um caso real de observação, com uma seleção de ativos ao longo de um determinado prazo de tempo. Busca-se, assim, encontrar os principais aspectos falhos do modelo tradicional e como eles afetam no resultado final.

Em seguida, serão analisados modelos derivados da análise de Markowitz, que apresentem uma forma mais adequada de calcular o retorno. A ideia principal nesse ponto é substituir o cálculo do retorno através de uma média aritmética simples, por um modelo que leve em conta um ambiente de juros compostos, de modo a evitar uma superestimação do resultado.

Com esse primeiro resultado, se almeja desenvolver estratégias preditivas que permitam encontrar uma composição de portfólio ideal para os parâmetros utilizados. Novamente, será feita uma análise como a realizada no modelo de Markowitz, para entender se o resultado obtido tem sentido prático. Algumas técnicas a serem utilizadas sobre o modelo proposto, que serão detalhadas à frente, são uma simulação de Monte Carlo e análises de beta, value at risk e correlação dos ativos.

1.3 Apresentação do manuscrito

O Capítulo 2 que segue, será utilizado para explicar os principais conceitos e definições que serão abordados nesse trabalho, além dos principais modelos de otimização de portfólios atualmente utilizados.

Em seguida, o Capítulo 3 apresentará uma análise dos resultados do modelo de Markowitz com os resultados reais dos ativos no período em questão. Além disso, a mesma análise será feita para alguns modelos derivados que serão também apresentados.

A partir daí, será realizado no Capítulo 4 um estudo acerca das possibilidades de aplicação do modelo proposto, bem como uma análise de sua aplicabilidade futura.

Capítulo 2

Revisão Bibliográfica

O presente capítulo propõe-se a apresentar uma contextualização dos conceitos, definições e métodos que serão abordados ao longo desse trabalho. Isso será feito afim de que o leitor possa se ambientar e não necessite de referências externas para compreender os estudos e análises realizados. Abaixo são apresentadas as principais ideias divididas em seções.
Para entender como funciona um modelo quantitativo de investimento e quais são suas vantagens, é necessário introduzir alguns dos principais conceitos econômicos e suas estratégias.
Os conceitos de portfólio de Markowitz, risco e retorno, análise fundamentalista e critério de Kelly são essenciais para compreender a criação da estratégia de investimento proposta no artigo. Para isso, o capítulo será divido em 4 partes básicas: principais conceitos básicos de mercado, indicadores fundamentalistas para predição futura, estratégias de otimização e análise de risco.

2.1 Portfólio ou Carteira de Investimentos

Um portfólio de investimentos consiste em uma combinação de produtos do setor, ponderados pelo peso relativo do patrimônio total investido. Ele pode ser constituído por produtos de renda fixa e ativos de risco, a exemplo de commodities, ações, derivativos, fundos de investimento entre outros.

Define-se portfólio de investimento como uma concentração de ativos previamente determinados em que o somatório da sua distribuição de pesos deve ser igual a 1, ou seja, o total investido é igual ao total do patrimônio disponível, desconsiderando-se alavancagens. Outro ponto necessário é que nenhum ativo pode ter concentração negativa no portfólio.

A ideia por trás da montagem de uma carteira de investimentos é diversificar o patrimônio de modo que a exposição total a um tipo de risco fique diluída, agregando segurança e rentabilidade aos investimentos.

Markowitz [3] enfatiza a ideia que para a escolha de um portfólio são necessários dois estágios essenciais. O primeiro visa demonstrar a ideia de observação e análise de dados anteriormente expostos e, em seguida, no segundo, é necessário fazer previsões futuras para cada um dos ativos escolhidos.

A alavancagem de um portfólio é uma técnica de movimentação de valores financeiros maiores que o total do capital investido, na qual o investidor necessita de determinada garantia financeira para realizar esse tipo de operações. A técnica será explicada com mais detalhes na seção 2.4.

Um dos pontos mais importantes na escolha de um portfólio é a definição de tolerância ao risco por parte do investidor. Um cliente com perfil mais conservador tende a distribuir seu portfólio em ativos de renda fixa (títulos públicos, debêntures, CRI).

Já, os clientes com perfil mais arrojado tendem a procurar ativos com maior risco em busca de um retorno mais alto em suas aplicações, investindo em ativos como ações, opções, criptoativos.

A montagem de um portfólio de investimento pode ser dividido em duas estratégias básicas:

- Compra de ativos focada no seu crescimento a longo prazo, visando um retorno maior anual, no período de, no mínimo, 5 anos. Normalmente, investimentos tomados com maior prazo de duração, diminuem a preocupação com a volatilidade intra-diária dos ativos e existe menor necessidade em acertar o *timing* de entrada em suas operações.

- Operações intra-diárias, procurando encontrar o *timing* exato das operações e obter lucro com a compra e venda desses ativos. Esse tipo de operação exige intenso gerenciamento de risco, para que o investidor não se perca com a promessa de elevar grande parte do seu patrimônio e perder boa parte de seu capital.

2.2 Retorno e Volatilidade

Para cada ativo financeiro se apresentam dois conceitos essenciais, para a compreensão de como o seu investimento se comporta ao longo do tempo: o risco e o retorno.

Esses dois parâmetros permitem balancear a carteira de investimentos, de modo a obter uma considerada mais conservadora ou agressiva, além de serem úteis também na comparação de ativos.

O modelo econômico de utilização desses dois conceitos foi introduzido por Von Neumann-Morgenstern [4], baseado na predição do resultado dos ativos e, em seguida, discutido por Markowitz [3]. Nesse trabalho cada ativo e portfólio será modelado tomando como base seu risco associado e retorno esperado.

O retorno de um determinado ativo em dado período de tempo, é definido como sendo a variação percentual no preço do ativo, desde o início do período de análise até o final. Para um ativo com valor inicial P_0 e valor P_t após t dias,o retorno $R(t)$ é definido como:

$$R(t) = \frac{P_t - P_0}{P_0}. \tag{2.1}$$

Para um portfólio, o retorno total pode ser obtido calculando-se a média ponderada dos retornos individuais de cada ativo constituinte por seu peso na carteira. Para um portfólio qualquer com n ativos, o retorno A é dado por

$$A = \sum_{i=1}^{n} w_i * R_i, \tag{2.2}$$

w_i é o peso de cada ativo dentro do portfólio e R_i o seu retorno.

O outro conceito essencial apresentado é o de volatilidade que pode ser expressado como o grau de frequência e intensidade das oscilações no preço de um ativo em determinado período de tempo. Define-se volatilidade como o desvio padrão do preço de um determinado ativo, em relação à regressão linear de seu preço em um dado período de tempo.

A volatilidade é essencial para mensurar o risco atribuído à uma aplicação. O conceito de risco pode ser definido como a probabilidade do retorno de um investimento ser diferente do inicialmente previsto. Um ativo considerado arriscado possibilita uma perda de volume financeiro maior, enquanto um ativo com menor risco possui menor probabilidade de perda de grande volume financeiro.

O risco pode ser segmentado em dois grupos: risco sistemático, que envolve o risco de mercado ou a influência de algum conceito macroeconômico no mercado como um todo e o risco não sistemático, que envolve o risco ligado diretamente à empresa aplicada.

Um ativo com maior volatilidade possui uma variação mais acentuada em relação às chamadas flutuações de mercado. Mostra que o ativo possui maior probabilidade de apresentar atenuada diferença de preços em determinado período.

Assim, quanto mais volátil o ativo for, maior a necessidade do investidor em observar atentamente o mercado, para saber a melhor hora para realizar seus investimentos. Muitas vezes, nesse momento, o investidor perde grande oportunidade de entrada ou saída em suas operações e precisa de mais tempo para obter mais sucesso em suas aplicações.

A volatilidade de um portfólio não leva em conta apenas o risco de cada um dos ativos isoladamente, mas considera a correlação entre cada um dos pares de ativos apresentado, analisando a movimentação conjunta dos mesmos.

Para uma carteira constituída por apenas 2 ativos com pesos w_1 e w_2, volatilidades σ_1 e σ_2, e correlação $\rho_{1,2}$, podemos determinar a variância total V através da fórmula:

$$V = w_1^2\sigma_1^2 + w_2^2\sigma_2^2 + 2w_1\sigma_1 w_2\sigma 2\rho_{1,2}, \tag{2.3}$$

a volatilidade é o desvio padrão da variância, logo seu valor é dado por:

$$Vol = \sqrt{V}. \tag{2.4}$$

2.2.1 Retorno Aritmético Médio

Para entender o conceito de retorno aritmético, suponha que um determinado ativo A possua retorno de 1%, 0,5% e 3% nos últimos 3 períodos. O ativo B possua retorno de -1%, 3% e 1% nesse mesmo intervalo. Define-se o retorno aritmético médio como a soma da série de retornos dividida pelo tamanho da série, conforme a Equação(2.5)

$$Arit = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} a_i, \tag{2.5}$$

a_i pode ser definido como o retorno do ativo em cada intervalo de tempo e n o número de amostras. Assim o ativo A, possui média aritmética de 1,5% e o ativo B, média aritmética de 1%.

Para descobrir o retorno aritmético do portfólio de investimento, utilizamos a Equação(2.2), substituindo o retorno pelo retorno aritmético individual de cada um dos ativos do portfólio. Assim, supondo o portfólio formado pelos ativos A e B, definidos acima com igual concentração de pesos, o investimento apresentaria um retorno aritmético médio de 1,25%.

No mundo das finanças, o modelo apresentado não é o mais apropriado para estimativa de retorno, devido ao mecanismo de juros compostos. Se o portfólio A possui 50% de rentabilidade no primeiro período, -50% no segundo período e 0% no terceiro período, pelo modelo de média aritmética, seu retorno é igual a 0%. Contudo, o verdadeiro retorno nesse intervalo de análise seria de -9,1440%, bem diferente do apresentado.

No modelo de alavancagem, que será apresentado posteriormente, é essencial que o cálculo do retorno apresente uma boa estimativa para que o investidor modele melhor sua gestão de risco e possa alavancar seu capital de forma assertiva.

2.2.2 Retorno Geométrico Médio

Um dos problemas abordados por Bernstein [5], que introduz o conceito de portfólio geométrico, é a ideia de que muitas vezes o retorno efetivo de uma carteira é ignorado no modelo de otimização. Assim, é realizada apenas uma aproximação, com uma média aritmética para estimar o que seria o retorno diário de um ativo.

O verdadeiro cálculo para encontrar o retorno de um ativo em determinado período, é a média geométrica, devido ao modelo de mercado financeiro baseado em juros compostos. Sendo assim, o modelo apresentado, utilizando o retorno aritmético, sempre possuirá um retorno maior. Contudo, seu resultado muitas vezes não descreve o real retorno obtido no período.

Uma das principais formas de otimização é escolher simplesmente o portfólio com o maior retorno médio geométrico esperado, colocando uma disputa entre a maximização, baseada na escolha dos ativos com maior índice de Sharpe e os ativos com maior retorno médio geométrico. O índice de Sharpe pode ser definido como o indicador que retrata o retorno excedente de uma aplicação financeira, em função de uma aplicação considerada livre de risco. Seu modelo será tratado com mais detalhes na seção 2.8.1.

O sistema apresentado por Latane [6] demonstra o modelo que possui a maior probabilidade de atingir a melhor rentabilidade em qualquer período de tempo.

Uma das grandes críticas ao modelo apresentado de maximização do retorno geométrico é a possibilidade de perder boa parte dos lucros em algum período adverso de uma carteira com maior volatilidade. Para analisar o funcionamento desse tipo de operação, primeiramente, apresenta-se a ideia de como calcular o retorno médio geométrico de um ativo arbitrário através da fórmula:

$$G = [\prod_{k=1}^{N} (1 + r_k)]^{1/N} - 1. \tag{2.6}$$

A fórmula 2.6 retrata que, para calcular o retorno geométrico de um ativo, primeiramente, calcula-se o retorno r_k para cada período k de análise e, em seguida, soma-se o valor unitário ao retorno de cada intervalo. O retorno somado ao valor unitário é multiplicado para cada período e, assim, é possível calcular o retorno acumulado do investimento.

Para determinar a média geométrica do retorno basta obter a raiz n-ésima do retorno acumulado, sendo "n"o total de períodos, e, em seguida, subtrair 1 do valor obtido. O retorno geométrico do portfólio é obtido somando a multiplicação do valor do retorno G_i pelo peso de cada ativo.

2.2.3 Retorno Aritmético Ajustado pela Volatilidade

Uma característica interessante sobre o retorno geométrico, calculado na Equação (2.6), é sua penalização de observações muito distantes da média, devido ao seu modelo baseado no produtório. Assim um ativo com probabilidade de falência não entraria nesse modelo.

Surge daí, então, a ideia de desenvolver um modelo equivalente ao de Markowitz, levando em conta não mais uma média geométrica dos retornos dos ativos, mas sim, a média geométrica do retorno do portfólio em um período de tempo estabelecido.

Como visto, ao calcularmos o retorno do portfólio, como uma média aritmética dos retornos dos ativos, o cálculo tende a superestimar o real resultado a ser obtido. Bernstein e Wilkinson [5] propõem uma aproximação do cálculo do retorno geométrico de um portfólio através da seguinte fórmula

$$G \approx R - \frac{\alpha V}{2(1 + \beta R)}. \tag{2.7}$$

G é o retorno geométrico do portfólio, R é retorno aritmético usual, V a variância e α e β são ajustes utilizados por Bernstein e Wilkinson [5], para obter um modelo matemático que melhor aproxime o retorno real do portfólio.

Nos capítulos subsequentes será utilizada a notação $A(\alpha,\beta)$ para indicar os modelos que utilizam, como base, a média aritmética, e os parâmetros α e β podendo assumir os valores 1 ou 0.

De modo equivalente, a notação $G(\alpha,\beta)$ servirá para indicar os modelos que utilizam, como base, a média geométrica individual de cada ativo, para o cálculo do retorno do portfólio, com os parâmetros α e β, podendo, novamente, assumir os valores 1 ou 0.

Com isso, tem-se os seguintes modelos possíveis que serão mais profundamente analisados na seção 3:

- A(0,0): média aritmética, com $\alpha = \beta = 0$
- A(1,0): média aritmética, com $\alpha = 1$ e $\beta = 0$
- A(1,1): média aritmética, com $\alpha = \beta = 1$
- G(0,0): média geométrica, com $\alpha = \beta = 0$
- G(1,0): média geométrica, com $\alpha = 1$ e $\beta = 0$
- G(1,1): média geométrica, com $\alpha = \beta = 1$

O ajuste do modelo aritmético é dado pela volatilidade ao quadrado, divido por um valor próximo de 2. Assim, é essencial que a volatilidade do ativo seja estimada da forma correta, pois se ela for subestimada, o retorno real do ativo será menor que o calculado, entrando no mesmo erro do método baseado na média aritmética dos ativos.

Para uma carteira, com um número arbitrário de ativos, a variância pode ser obtida através da fórmula:

$$V = \sum_{ij} w_i w_j V_{ij}, \tag{2.8}$$

w_i e w_j é o peso de cada ativo em seu portfólio e V_{ij} a covariância entre os ativos.

Nesse modelo de aproximação, devemos considerar a existência dos parâmetros α e β. Grosso modo, esses termos atuam para aumentar o grau de controle da fórmula, permitindo dar mais ou menos relevância à volatilidade e ao risco gerado relativo à volatilidade, respectivamente. Devido à existência desses parâmetros, a Equação(2.7) é conhecida como fórmula (α,β).

É possível inverter a Equação (2.7) e obter o retorno geométrico G em função do retorno aritmético R^* da seguinte forma

$$R^* = \frac{2G + \alpha V}{1 - \beta G + \sqrt{(1+\beta G)^2 + 2\alpha\beta V}}. \tag{2.9}$$

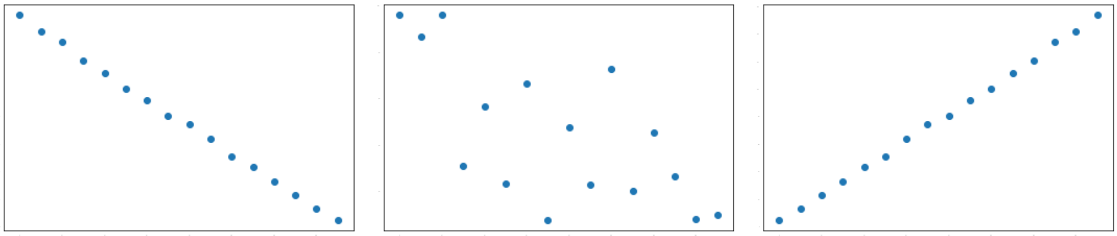
Essa inversão é útil e é utilizada nos modelos que tomam como base a média geométrica dos ativos (G(1,0) e G(1,1)). A partir dela, utiliza-se a média geométrica de cada ativo individualmente para calcular uma média pseudo-aritmética, que será, então, utilizada na equação (2.7).

A vantagem desse procedimento consiste no fato dele trazer resultados precisos para portfólios com um único ativo, ao mesmo tempo em que resolve a problemática de se utilizar uma média aritmética em um ambiente de juros compostos.

2.3 Covariância e Correlação

A covariância retrata a medida de relacionamento entre duas variáveis. Em outras palavras, essa denominação pode ser explicada como o resultado da variância entre dois ativos financeiros.

Uma relação positiva de covariância indica que as variáveis caminham no mesmo sentido, enquanto que uma relação negativa exemplifica ativos que se movimentam de forma inversa. Uma covariância próxima de zero, indica ativos que não possuem relação de retorno.Assim, o movimento de um ativo é completamente independente do movimento do outro ativo. A figura 2.1 apresenta a direção de cada um dos movimentos apresentados para cada valor de covariância.



(a) Alta covariância negativa (b) Covariância perto de zero (c) Alta covariância positiva

Figura 2.1: Diferentes tipos de covariância

A fórmula para definição da covariância entre dois ativos pode ser escrita como:

$$COV(x,y) = \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})(y_i - \overline{y})}{(n-1)}. \tag{2.10}$$

Sendo x_i o elemento i da série de dados "x", $\overline{x}$ representa o valor médio da série de dados, y_i o elemento "i"da série de dados y, $\overline{y}$ representa o valor médio da série de dados "y"e "n"representa o total de itens do conjunto de dados.

Dividindo a covariância de dois ativos pelo produto da variância dos mesmos de forma individual, obtém-se uma variável denominada correlação de propriedade igual à variância com intervalo numérico definido.

O conceito de correlação é essencial para entender a intensidade do retorno entre os ativos. O índice encontra-se no intervalo entre -1 e 1, sendo 1 ativos perfeitamente relacionados e -1, ativos negativamente relacionados. Já o valor 0 indica ativos que não apresentam nenhuma correlação. A correlação entre 2 ativos em um portfólio pode ser calculada por:

$$\rho = \frac{covar(1,2)}{var(1)var(2)}. \tag{2.11}$$

2.4 Alavancagem

O modelo de Alavancagem é uma técnica de investimento em que o investidor utiliza seu próprio capital e mais um capital de terceiros na possibilidade de aumentar seus ganhos, com um volume financeiro mais alto. A instituição financeira que o empréstimo foi tomado para realização do investimento não importa.

Um conceito essencial, para poder operar alavancado através do mercado, é o de margem de garantia. Reflete o valor financeiro que o investidor necessita em sua conta, para garantir investimentos com alavancagem financeira. Sem a margem de garantia, o investidor fica impossibilitado de realizar esse tipo de operação. Se o investidor possuir prejuízos em seu portfólio de volume financeiro de valores iguais ou superiores ao da margem financeira, a operação é automaticamente desfeita e o cliente perde apenas o capital investido na operação.

Devido ao maior conhecimento no mercado financeiro, os principais gestores dos fundos de investimento utilizam o mecanismo de alavancagem para melhorar a rentabilidade dos clientes, justificando, assim, as despesas com taxa de administração e performance. Esse mecanismo será tratado com mais detalhes na seção 4.4.

Muitas vezes os investidores não aceitam a ideia de alavancar seus investimentos. Contudo, sua aplicação possui uma alavancagem indireta. Grande parte das empresas listadas nas bolsas de valores utilizam o mecanismo de alavancagem para financiar e expandir suas operações sem, necessariamente, aumentar seus gastos.

Por mais que alavancagem possa ser algo muito útil para obter maior rentabilidade em um período mais curto de tempo, ela possui algumas desvantagens que serão identificadas a seguir:

- O prejuízo do ativo também é multiplicado na alavancagem. Se um ativo alavancado 10 vezes cair 10% em determinado período, o investidor perdeu todo seu capital aplicado.
- Para manejar os riscos nessa operação, é essencial que o cliente possua amplo conhecimento de mercado financeiro e nas principais estratégias de gerenciamento de risco.
- Necessidade de acompanhamento maior do mercado para poder aproveitar melhor as oportunidades tendo em vista que seu retorno é multiplicado por um determinado fator.

2.5 Modelo CAPM

A sigla CAPM significa Capital Asset Pricing Model (modelo de precificação dos ativos). Mensura a relação entre o risco sistemático e o retorno esperado de determinado ativo e sua fórmula é utilizada para calcular o retorno esperado de um ativo. O risco sistemático ou risco não diversificável retrata a recompensa na forma de um prêmio de risco, esse prêmio seria o aumento na rentabilidade de seu investimento. Assim, quanto maior o risco do investimento, maior a expectativa de retorno. A fórmula desse sistema é apresentada abaixo:

$$ER_a = R_f + \beta_a(ER_m - R_f). \tag{2.12}$$

ER_a retrata a expectativa de retorno do ativo, R_f retrata o retorno da taxa livre de risco (Selic), ER_m retrata o retorno esperado da carteira de mercado e β_a representa a volatilidade dos retornos em função da carteira de mercado.

Se o ativo é considerado mais volátil, seu β_a possui valor maior que 1 e, se seu investimento for menos volátil, seu beta é menor que um.

O objetivo do modelo CAPM é construir uma expectativa de retorno, baseado no retorno do benchmark estipulado, segundo o grau de semelhança de rentabilidade, em comparação ao benchmark proposto.

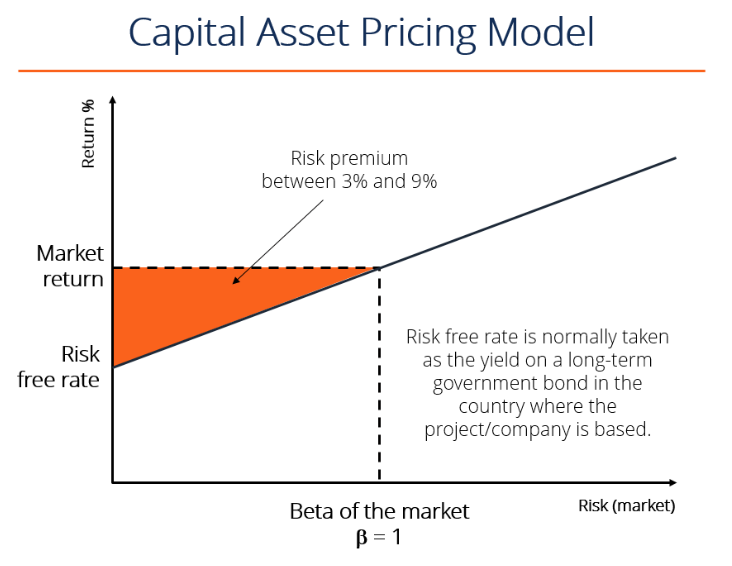


Figura 2.2: Análise de CAPM para um determinado ativo. Modificado de [1]

A figura 2.2, disponível em [1], retrata bem o modelo baseado no CAPM. A intersecção entre a linha tracejada em azul e a reta laranja representa o ponto estimado do mercado. Assim, ativos com β_a menor que o do mercado, representam ativos de menor risco e ativos com β_a maior que o do mercado representam ativos de maior risco.

Outra letra grega muito conhecida no mercado financeiro e essencial para entender o modelo de CAPM é o α_a que indica a capacidade de um investimento de gerar lucros maiores do que o esperado pelo mercado.

Os grandes gestores de fundos procuram aumentar o α_a, pois ele mostra o diferencial dos investidores mais experientes. Uma das estrategias mais utilizadas para aumentar o α_a de uma carteira, é alavancando seu capital. A alavancagem utilizada em nossa estratégia será apresentada na seção 4.

2.6 Análise Fundamentalista x Análise Técnica

No mercado financeiro existem duas escolas básicas de pensamento, a análise fundamentalista e a técnica. Sua linhas de pensamento são consideravelmente diferentes e cada um dos conceitos e estratégias dos 2 diferentes tipos de investimento, serão apresentados abaixo.

2.6.1 Análise Técnica

A técnica utilizada consiste na análise de gráfico e dados do ativo em questão. Existem estratégias para momentos de curto, médio e longo prazo. Sua teoria se baseia na ideia de que no gráfico, existem todas as informações necessárias sobre o ativo base.

O objetivo principal dessa linha de pensamento é determinar a tendência de comportamento de determinado instrumento financeiro, rastreando sua oferta e demanda. Para analisar essa movimentação tendenciosa do mercado, foram desenvolvidas técnicas e indicadores, que ajudam a compreender melhor essa estrutura e conseguir "surfar nessa tendência".

Um conceito essencial para utilização desse mecanismo, é o de *timing*. Esse modelo sinaliza a melhor hora de entrada ou saída de determinada operação, esse período é determinado pelo próprio investidor, no momento da realização da transação.

Muitos dos investidores veem a análise técnica como uma espécie de magia negra sem qualquer comprovação científica. Os principais analistas de Wall Street consideram essa estratégia como algo subjetivo e muitas das ideias são tiradas da própria cabeça do investidor. Outra crítica muito difundida sobre essa metodologia é sua origem na hipótese do mercado eficiente. Essa teoria traz a ideia de que os preços do mercado sempre refletem todas as informações dos papéis. Por esse modelo não existem ativos considerados baratos ou caros, pois eles se encontrarão sempre em seu preço justo.

Por mais que muitas das estratégias indicadas não possuam comprovação científica, com um bom gerenciamento de risco e um estudo qualificado nas operações utilizadas, é muito possível obter lucro utilizando esse modelo. O presente artigo utiliza a análise fundamentalista para tomada de suas decisões, ela será apresentada na seção 2.6.2.

2.6.2 Análise Fundamentalista

A análise fundamentalista é um método que leva em consideração os fatores econômicos, financeiros e o setor de determinada empresa, para determinar um preço considerado justo de sua negociação a mercado e possíveis perspectivas para seu futuro.

Por essa técnica, os analistas de mercado identificam todos os possíveis indicadores que possam alterar os valores do título. Passa por fatores macroeconômicos como inflação, Produto Interno Bruto (PIB), taxa de juros, consumo e desemprego. Além de retratar os fatores microeconômicos como gestão das empresas, influência do preço na oferta e demanda.

O estudo por meio dessa técnica não é focado no preço da ação atual, mas sim o preço que a empresa deveria valer segundo seus indicadores financeiros. A estratégia do investidor é baseada no balanço das empresas, sendo que cada investidor possui sua própria estratégia. Alguns procuram encontrar empresas que distribuam mais dividendos, outros, empresas que possuem alto potencial de alavancagem de seus lucros. Todavia, a ideia central é encontrar empresas que possuem bons balanços patrimoniais e possuam indicadores descontados pelo seu preço real da ação.

As variáveis fundamentais podem ser definidas em duas categorias: quantitativas e qualitativas. A categoria quantitativa pode ser retratada basicamente como aquilo que é possível analisar a partir de número e, seu principal objeto é o demonstrativo financeiro de uma empresa. O qualitativo é mais difícil de mensurar e, alguns dos seus principais objetos são: a análise dos principais membros da empresa, as propriedades da tecnologia presente no produto, grau de convencimento do público com o negócio, como funciona o reconhecimento da marca.

O cenário apresentado por essa metodologia permite o analista, fazer projeções sobre os rumos de determinada empresa em sua trajetória futura. Assim é possível determinar o possível caminho futuro de uma cotação. Um dos principais indicadores apresentados é o P/L e ele será apresentado na subseção posterior.

2.6.3 P/L

$$P/L = \frac{\text{Preço}}{LPA} \tag{2.13}$$

O preço representa o valor do ativo em determinado período de tempo e LPA representa o lucro líquido apurado dividido pela quantidade de ações disponíveis da empresa no mercado.

O indicador traz a ideia de quanto o investidor está disposto a pagar pelos lucros da empresa. Representa também quantos anos o investidor levaria para recuperar o valor aplicado nesta ação. Assim, fazendo uma análise do P/L futuro é possível descobrir uma estimativa de retorno futuro anual para determinado ativo. Essa análise será apresentada na seção 4.

Uma empresa com P/L de 15 demoraria, aproximadamente, 15 anos para recuperar o valor investido naquele período. Se a empresa leva 15 anos para obter 100% de lucro em um ano por análise de juros compostos, ela produziria um retorno anual aproximado de 4,73%.

Um valor de P/L muito alto pode demonstrar uma ação muito cara ou uma possível expectativa de mercado sobre o papel. Empresas de tecnologia costumam possuir P/L mais alto devido a sua possibilidade de grande crescimento a longo prazo. Empresas com P/L baixos podem indicar possibilidade de ação descontada ou que o mercado não vê muita atratividade no papel. Empresas de energia elétrica devido a sua consolidação e menor possibilidade de expansão possuem o valor de P/L mais baixo.

O P/L do índice é baseado na ponderação dos pesos dos ativos que compõem o índice com seu valor de P/L admitido.Em empresas que possuam ações ordinárias e preferenciais, o índice é baseado na empresa e não no ticker da ação, assim as ações dos dois tipos apresentam o mesmo valor de P/L.

O P/L se utiliza da orientação de lucros futuros apresentado pela própria empresa para estimar o indicador. Esse modelo é útil para comparar os lucros atuais com os lucros futuros e ajuda a fornecer uma imagem mais clara de como serão os lucros presentes no futuro.

Um dos problemas apresentados pelo indicador futuro é que muitas vezes as empresas ou subestimam os lucros, com o intuito de superar as expectativas de P/L quando os lucros do próximo trimestre forem anunciados ou superestimam os mesmos, para posteriormente ajustá-los para o próximo trimestre.

2.7 M2

O M2 é um dos tipos de oferta monetária (moeda e outros instrumentos líquidos na economia de um país na data medida), que inclui os elementos de M1 (moeda física, depósitos à vista, cheques de viagem) mais o chamado *near money*. Esses ativos não são tão líquidos como os presentes em M1, contudo, podem ser facilmente convertidos em valor monetário (depósitos de poupança, títulos do mercado monetário).

Uma das maiores importâncias do M2 é na previsão da inflação. A inflação tem importante influência na demanda de emprego e gastos do consumidor. Uma das principais funções monetária dos países é equilibrar desemprego e inflação. A melhor maneira de fazer isso é manipulando a oferta de dinheiro M2, que apresenta os indicadores de direção, extremidade e eficácia da politica aplicada.

Em períodos de crise como o caso do COVID 19, o governo acaba por emitir mais moeda e injetar liquidez no mercado. As principais economias utilizaram a medida de diminuir as taxas de juros às mínimas históricas e aumentar a oferta de moeda, em geral, como mecanismo para equilibrar a economia. Contudo, países endividados, como o Brasil, ficaram ameaçados de rompimento do teto fiscal com essa medida.

Uma das principais utilidades do M2 no presente artigo, é procurar alguma relação existente entre ele e o valor do ouro, realizando uma predição e expectativa sobre o ouro futuro. A seguir, apresenta-se o gráfico de evolução dos dois ativos no período entre 2010 e 2020.

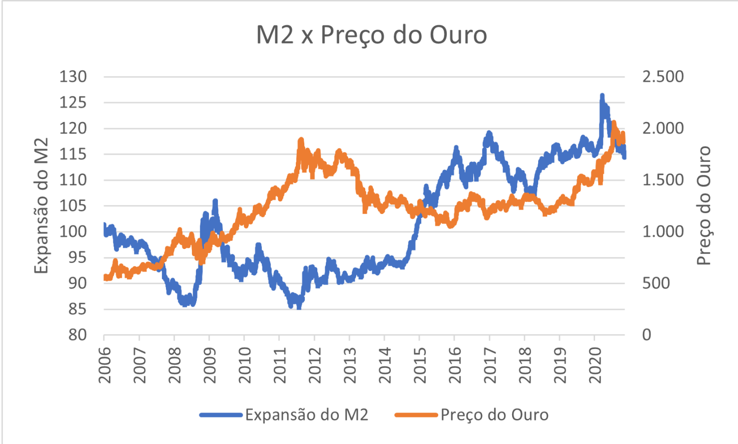


Figura 2.3: Evolução do Ouro e do M2 nos últimos 10 anos

A fim de se obter uma relação mais aproximada no tocante à relação do M2, com o preço do ouro é necessário considerar também a demanda por dinheiro. Para tal, utilizamos uma correção da base do M2 a partir do "Trade Weighted U.S. Dollar Index", que é um índice que reflete a demanda por dólar na economia. A figura 2.4, abaixo, demonstra que a relação após feita a compensação da demanda por dinheiro, é consideravelmente mais próxima.

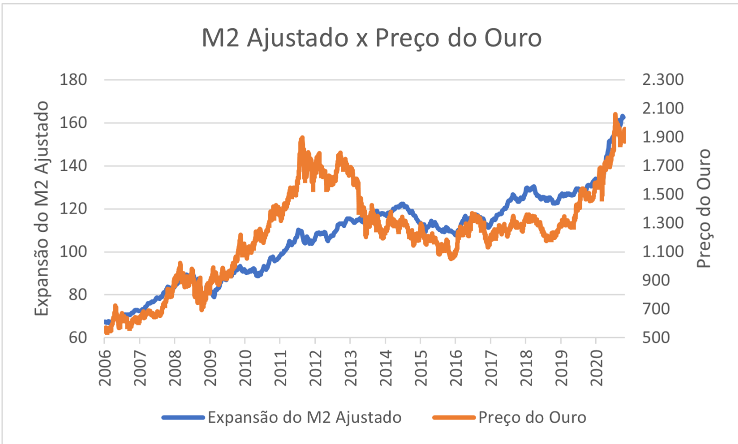


Figura 2.4: Evolução do Ouro e do M2 compensado pelo "Trade Weighted U.S. Dollar Index"

Pode-se estudar uma possível correlação presente entre os 2 ativos nesse período, uma das possíveis explicações para essa relação é que a inflação é causada por um aumento na oferta de moeda e como o ouro é uma proteção contra a inflação, o crescimento da oferta de moeda afeta positivamente o preço do ouro, contudo essa análise é bem simplista e desconsidera vários dos fatores que influenciam o andamento tanto da inflação como do ouro, por isso a correção com a variância é essencial para estimar melhor esse modelo e obter uma expectativa mais realista sobre o sistema. A variância histórica de um ativo normalmente se mantém em períodos mais longos, assim é essencial esse ajuste para melhor estimar o retorno do ativo.

2.8 Otimização de Portfólio

Diferente da seleção de portfólio, que consiste em escolher os ativos buscando diversificação e ativos de maior confiança, a otimização se baseia na ideia de alocar recursos com objetivo de minimizar os riscos e maximizar os retornos. A seguir, apresenta-se algumas das principais estratégias de otimização de um portfólio de investimento.

2.8.1 Modelo de Markowitz

Diante dos conceitos apresentados, surge a necessidade de obter uma carteira de investimentos que maximize o retorno esperado enquanto minimiza a volatilidade. Desse modo, iniciam-se os estudos na área de otimização de portfólios, sendo um dos principais expoentes desse campo o economista americano Harry Max Markowitz.

De forma simplificada, a ideia de Markowitz consiste em obter o portfólio com maior retorno possível para um dado nível de risco, utilizando, como base, dados históricos de ativos. Com isso, obtém-se a chamada fronteira eficiente, ou bala, de Markowitz, que tem como objetivo encontrar a concentração ideal, para cada ativo de seu portfólio, segundo o retorno analisado de anos anteriores.

O modelo categoriza o investimento em dois conceitos básicos: retorno e risco. O retorno representa a parte desejável do investimento, buscando sua maximização. No caso do risco, o objetivo é que seu portfólio possua o menor possível, para assim obter um modelo de investimento com possibilidade de ganho maior e com o investidor correndo menos risco ao realizá-lo.

Acerca dessa discussão, vale dizer que, para dois portfólios com mesma volatilidade, o que tiver menor retorno será ineficiente, uma vez que os riscos serão essencialmente os mesmos. De modo análogo, para dois portfólios com mesmo retorno, aquele que possuir maior risco será igualmente ineficiente, visto que é possível optar pelo que tem menor volatilidade, alavancar a posição e obter um retorno maior com o mesmo risco.

Adjunto aos estudos de Markowitz, surge também a teoria e o indicador do economista americano William Forsyth Sharpe. O índice de Sharpe mostra a performance de um investimento frente ao ativo com risco neutro no mercado. O cálculo é feito através da fórmula:

$$S = \frac{R_1 - R_0}{V_1}, \tag{2.14}$$

R_1 e V_1 são respectivamente o retorno e a volatilidade do ativo sob análise, e R_0 é o retorno do ativo com risco neutro. Usualmente, para investimentos no Brasil considera-se como ativo de risco neutro o CDI.

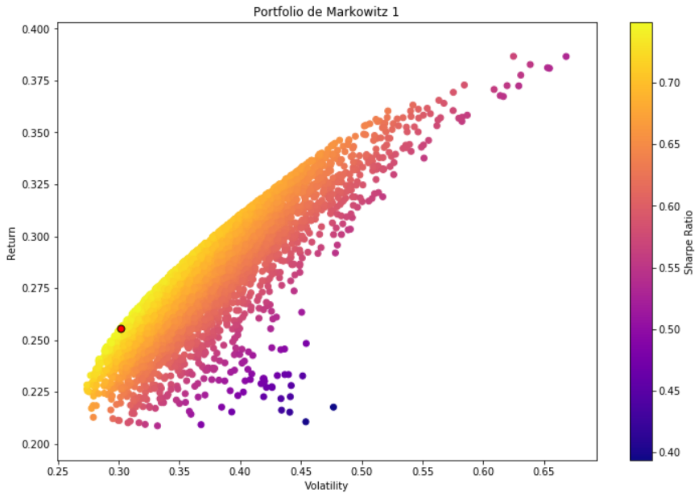


Figura 2.5: Portfólio de Markowitz

A figura 2.5 apresenta a simulação de um portfólio de Markowitz para ações brasileiras. O eixo x, representa o risco do portfólio e o eixo y o retorno. A curva possui um formato de bala e, cada um dos pontos da curva representa um portfólio de diferente concentração para cada um dos ativos. Quanto mais clara a coloração do portfólio, maior o seu sharpe calculado. O ponto de maior sharpe é apresentado com a coloração vermelha.

A análise inicial pode ser expandida para obtenção do portfólio que maximiza não apenas o retorno para um determinado nível de risco, mas também o retorno levando em conta o nível de risco.

Ocorre que, para a fronteira eficiente de Markowitz, apesar de um portfólio na fronteira possuir o maior retorno possível para uma dada volatilidade, o custo do retorno relativo ao risco pode ser demasiado elevado e, assim ineficiente. Para carteiras com Sharpe otimizado é possível, por exemplo, alavancar a exposição, aumentando a volatilidade e o retorno, de modo que seja possível obter maiores ganhos que um portfolio com Sharpe ineficiente, mesmo que ele esteja na fronteira de Markowitz. Assim, é possível restringir a análise de Markowitz de modo a encontrar apenas os portfólios com maior Sharpe, sendo esses, em tese, mais eficientes.

2.8.2 Fronteira Eficiente

A fronteira eficiente representa a linha que otimiza o portfólio baseado em cada nível de risco, produzindo o maior retorno, segundo determinada distribuição de ativos. A localização das carteiras na fronteira eficiente, depende do grau de tolerância à risco do investidor.

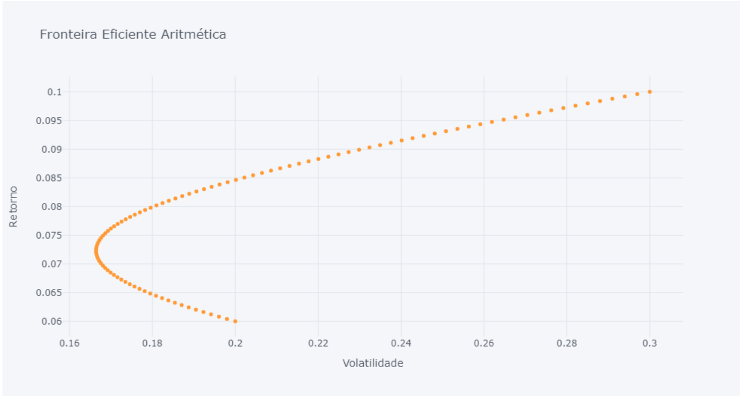


Figura 2.6: Fronteira Eficiente

A figura retrata a fronteira eficiente de um portfólio com 2 ativos. O primeiro com, 6% de retorno e 20% de vol e o segundo, com 10% de retorno e 30% de volatilidade. A curva é traçada com cada um dos pontos variando a sua distribuição de 0 a 100%, com passo de 1% de peso para cada ativo a cada simulação. A parte de cima da curva representa a fronteira eficiente desses 2 ativos. Todos os outros portfólios não eficientes estariam dispostos na parte de dentro da curva com um retorno menor para a mesma volatilidade.

A curva é necessária para mostrar exatamente o modo como a diversificação melhora o sharpe do portfólio e que a relação risco e retorno dos ativos não tem relação linear.

A fronteira eficiente se baseia em alguns pressupostos que nem sempre são verídicos. Os investidores possuem acesso às mesmas informações sobre o mercado, nenhuma pessoa é capaz de influenciar o mercado, todos os investidores têm acesso ilimitado à investimentos, que entreguem a taxa livre de risco e assumimos que os retornos dos ativos seguem uma distribuição normal.

Outra análise interessante para a fronteira eficiente é adicionar o ativo baseado na taxa livre de risco, que, no caso dos investimentos no Brasil, é a taxa Selic. Atualmente, a taxa se encontra em sua mínima histórica de 2%. Assim a volatilidade do terceiro ativo é igual a 0. Uma nova curva é traçada com esse novo ativo.

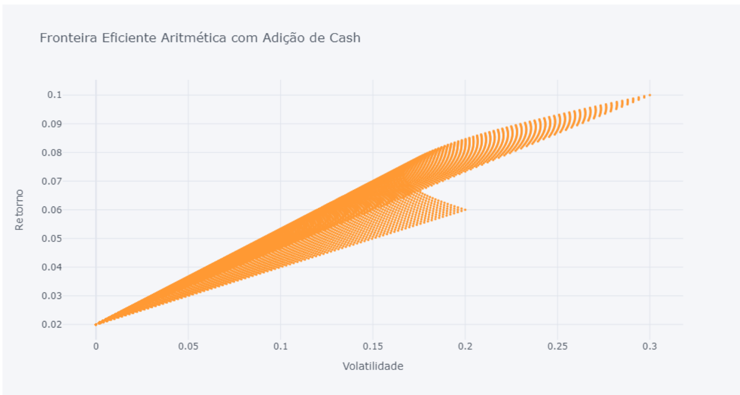


Figura 2.7: Fronteira Eficiente adicionando a taxa livre de risco

A curva é formada por 100 fronteiras eficientes, cada uma delas deslocada de 1% de alocação no ativo livre de risco com 2% de retorno e 0% de volatilidade. A extremidade inicial da curva é baseada na carteira sem nenhum valor aplicado no portfólio otimizado A,B. Para saber a distribuição de ativos em cada ponto, basta você analisar que cada curva é deslocada de 1% de adição do ativo livre de risco, assim a curva 40 possui 40% aplicado na taxa livre de risco e 60% é distribuído pela fronteira eficiente. Todas as curvas são iguais, apenas deslocadas pela adição desse ativo livre de risco.

2.8.3 Fronteira Geométrica Eficiente

O artigo publicado por MacBeth [7] retrata que o modelo apresentado por Markowitz, utiliza o retorno aritmético para otimizar o sistema. Contudo, o modelo baseado em juros compostos necessita de um ajuste que será demonstrado na seção 3. Esse ajuste vem da ideia de que o retorno real do sistema é baseado na média geométrica da rentabilidade do portfólio construído com determinada distribuição de pesos.

Nesse contexto, surge a necessidade de ajustar também o modelo da fronteira eficiente que anteriormente era uma reta aplicada ao modelo de Markowitz. A fronteira eficiente se torna uma figura semelhante a uma hipérbole, ajustada com a variância para todos os modelos que serão apresentados na seção 3, e a fronteira recebe o nome de fronteira eficiente geométrica.

A figura 2.8 mostra o modelo de fronteira eficiente geométrica utilizando os mesmos ativos da seção 2.8.2, apenas alterando a forma de cálculo do retorno, realizando o modelo de Markowitz corrigido pela variância.

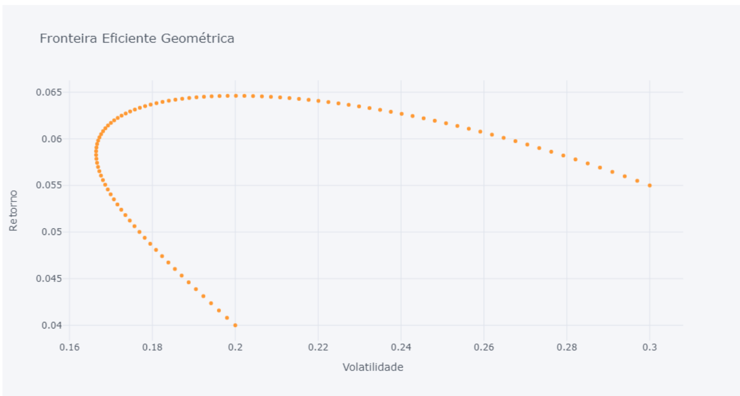


Figura 2.8: Fronteira Eficiente Geométrica

Pela curva laranja é possível perceber que a fronteira eficiente não é mais uma reta e sim uma curva, com modelo semelhante a uma hipérbole com concavidade para baixo. Essa curva possui tal característica devido ao ajuste de retorno da volatilidade elevado ao quadrado e dividido por 2.

A fronteira geométrica eficiente se inicia no ponto de volatilidade mínima (Portfólio de Mínima Variância) e termina no ponto de máximo retorno geométrico.

Do mesmo modo, é possível traçar a fronteira geométrica a partir do ativo livre de risco e observar cada uma das curvas sendo formadas com alteração de 1% desse ativo. A figura 2.9(a) representa essa curva e retrata da melhor forma cada uma das curvas da fronteira eficiente geométrica, sendo alterada conforme o valor de ativo livre de risco vai aumentando. O ponto inicial da curva é o mesmo para as duas fronteiras, pois apenas o ativo livre de risco é considerado nessa análise e como seu risco é zero, a fórmula de retorno aritmético e o aritmético corrigido é igual.

(a) Fronteira Eficiente Geométrica com adição de do ativo livre de risco

(b) Zoom parte inicial da curva

Um ponto muito interessante da curva também é o ponto em que o ativo livre de risco é igual a zero e a curva apresenta o maior retorno geométrico, pois os ativos com risco possuem uma rentabilidade expressivamente maior que o ativo livre de risco. Contudo, a adição desse ativo é uma ótima estratégia para diminuir o risco da carteira.

2.8.4 Portfólio de Mínima Variância

A proposta do portfólio de mínima variância é apresentar a distribuição otimizada de retorno dos ativos distribuindo os pesos na procura da carteira com a menor distribuição de volatilidade.

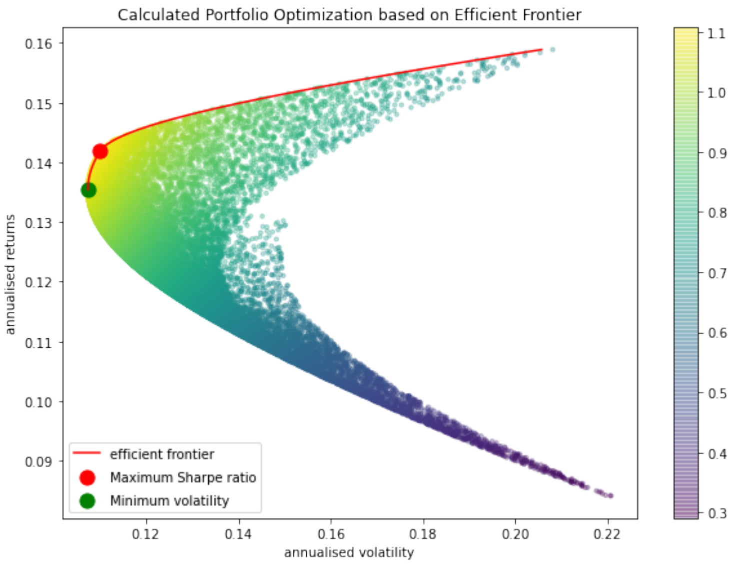


Figura 2.10: Portfólio de Markowitz utilizado na análise de mínima variância

A figura 2.10 apresenta a distribuição do Portfólio de Markowitz de uma seleção de ativos, o ponto verde representa o portfólio de mínima variância. A simulação permite mostrar que existem várias distribuições de portfólio com a mesma volatilidade. Todavia, a ideia do sistema é encontrar o portfólio com menor volatilidade e que ele possua o retorno dos ativos otimizado. O portfólio de mínima variância sempre se encontra no ponto de extremo da hipérbole.

Um portfólio de variação mínima é construído com investimentos de baixa volatilidade ou uma combinação de investimentos voláteis com baixa correlação entre si. Alguns investimentos podem ser voláteis, mas quando combinados, criam um portfólio com menor volatilidade que cada parte analisada individualmente. Mesmo adicionando ativos mais voláteis ao portfólio, diminui a volatilidade da carteira.

2.8.4.1 Critério de Kelly Modificado

John Kelly Jr. foi piloto na segunda guerra mundial até ingressar no centro de pesquisa e desenvolvimento Bell Labs. Durante o período em que esteve lá, foi conhecido como uma das pessoas mais brilhantes ficando atrás apenas de Claude Shannon, conhecido como o pai da moderna teoria da informação.

Seu estudo inicial, se baseava em um jogo em que o jogador participante possuía informações privilegiadas, antes que o evento acontecesse. O objeto em questão era uma corrida de cavalos em que o especulador recebia uma notícia privada sobre o resultado da corrida. Kelly raciocinou que existiria a possibilidade da mensagem recebida pelo jogador possuir uma certa quantidade de ruído aleatório, que reduz a veracidade da informação transmitida. Assim, na primeira vez que o jogador apostasse todo seu capital baseado nessa informação recebida, ele perderia todo o montante aplicado e sairia de mãos abanando. Contudo, se o investidor fosse muito conservador, ele estaria abrindo mão de uma grande possibilidade de obter lucros acima do esperado.

A ideia por trás da teoria é que existiria um valor ótimo de aplicação de capital por parte do apostador para esse cenário. Assim, esse modelo pode ser quantificado e foi apresentado o critério de Kelly:

$$K\% = \frac{(bp - q)}{b}. \tag{2.15}$$

O valor de K pode ser definido como a fração do seu bankroll que deve ser apostada, b é a probabilidade de cumprimento do contrato no caso de uma vitória, p é a probabilidade do investidor vencer a aposta e q a probabilidade do investidor perder a aposta.

O valor maior obtido utilizando o critério de Kelly indica que o investidor deve apostar mais que todo seu capital, alavancando seu patrimônio pela atratividade da proposta oferecida.

A RHS Financial, uma das maiores gestoras de wealth dos Estados Unidos, então começou a utilizar o critério de Kelly para mencionar a alavancagem de determinado investimento baseado em seu retorno e seu possível nível de risco. Assim o critério de Kelly modificado para o mercado de ações possui a fórmula:

$$f_i = \frac{\mu_i}{\sigma_i^2}. \tag{2.16}$$

O valor de μ_i é determinado pela expectativa de retorno de um ativo menos a taxa livre de risco (Selic para o mercado brasileiro). σ_i é calculado como a vol do ativo apresentado.

Suponha que o investimento em um ativo X possua um retorno esperado futuro de 10%, o ativo tem volatilidade histórica de 20% e aplicado no Brasil, onde a taxa livre de risco se encontra em 2%. Assim o valor de μ_i será de 8%, σ_i^2 possui um valor de 4%. O valor f_i será igual a 2, o investidor que aplica 100 reais nesse exemplo poderá estar aplicado em até 200 reais, com a utilização da alavancagem, segundo o critério de Kelly.

O critério de Kelly exige intenso acompanhamento do mercado devido o seu percentual de alavancagem, além de exigir um rebalanceamento contínuo da sua alocação de capital para que a estratégia continue em operação.

A seguir apresenta-se uma análise do SP500, comparando os retornos da estratégia de Kelly com um sistema 3x alavancado, 4x alavancado e metade do critério de Kelly, a imagem foi retirada de [2].

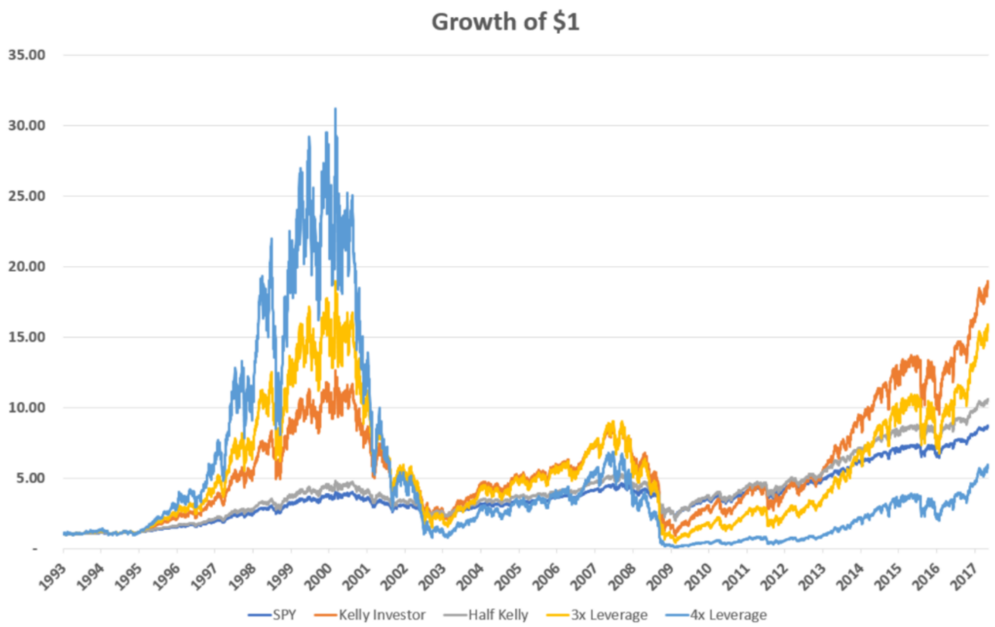


Figura 2.11: Estudo do critério de Kelly no SP500. Modificado de [2]

A figura 2.11 mostra a estratégia de 4x de alavancagem. Inicialmente, ela possui altíssimo retorno. Contudo, no final sua estratégia encerra a série de dados com a menor rentabilidade, mostrando que grandes ganhos podem se tornar grandes perdas a longo prazo.

O modelo de metade do critério de Kelly atendeu muito bem as expectativas, por mais que seu retorno seja menor que as curvas de maior alavancagem, seu risco associado é muito mais baixo.

Como o resultado da aproximação do critério de Kelly completo muitas vezes pode atribuir ao investimento um alto grau de alavancagem, por mais que o investidor não corra risco de falência pelo método apresentado, ele pode apresentar queda de até 99% do seu patrimônio financeiro.

Por esse alto risco de perda do capital utiliza-se a metade do critério de Kelly como o máximo que o investidor pode alavancar seu capital para obter bons retornos. Uma estratégia interessante é a utilização de um quarto do critério de Kelly para alavancagem de capital, diminuindo ainda mais o risco dos seus investimentos.

2.8.5 Simulação de Monte Carlo

A simulação de Monte Carlo é um método estocástico que permite o entendimento do risco e da incerteza no processo de tomada de uma decisão. Esse sistema utiliza de processos que não podem ser previstos com a utilização de variáveis aleatórias. A técnica é utilizada por diferentes profissionais dos mais variados ramos de atuação, finanças, gerenciamento de projeto, engenharia, desenvolvimento de processo, meteorologia.

O nome do método é baseado em Monte Carlo, a região administrativa do principado de Monaco, mundialmente conhecida pelos seus cassinos e, um dos principais locais para aplicação da simulação.

O conceito de Monte Carlo é baseado na Lei dos Grandes Números e no Teorema Central do Limite. A Lei dos Grandes Números afirma que quanto maior o número de vezes uma ação é tomada, maior a chance dela representar de forma correta o sistema real. O Teorema Central do Limite afirma, que com um número maior de amostras pode-se considerar a distribuição da média aproximadamente a uma distribuição normal. O esquemático abaixo retrata as etapas do processo para desenvolvimento de um modelo de Monte Carlo.

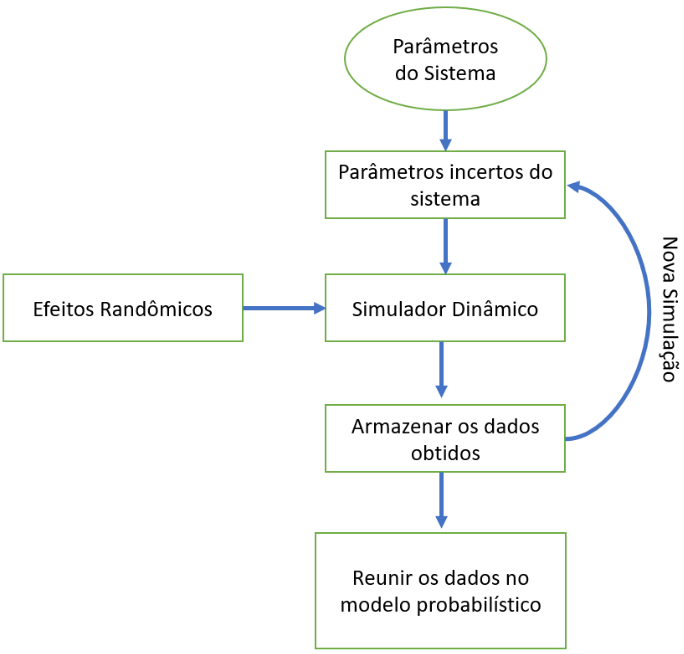


Figura 2.12: Monte Carlo Esquemático

A simulação de Monte Carlo (MCS) utiliza a variável incerta e atribui a ela um valor aleatório. Ao rodar o modelo, a variável muda seu resultado e o programa é executado novamente para obter novos valores. Com, a simulação completa, obtém-se uma média para traçar uma estimativa do sistema.

2.8.6 Calculando o Modelo de Monte Carlo

Uma das principais aplicações do modelo de Monte Carlo é na predição de risco de um portfólio financeiro em determinado período de tempo. O modelo utilizado para simulação de Monte Carlo, no devido experimento, é baseado no movimento geométrico Browniano com processo estocástico.

Isso indica que a distribuição de probabilidade para os valores futuros do ativo depende apenas do valor atual, não sendo afetada por qualquer evento ocorrido no passado. O processo segue distribuição normal e sua variância cresce de forma linear com incremento do tempo.

Existem 2 componentes básicos para a aplicação do modelo de Monte Carlo na evolução do preço do ativo: o drift, que é um movimento direcional que retrata o valor de retorno esperado para determinado ativo e a variável aleatória, que é multiplicada à volatilidade do sistema.

A fórmula para o cálculo da análise de Monte Carlo utilizando o modelo Geométrico Browniano é

$$\frac{\Delta S}{S} = \mu_n \Delta t + \sigma \epsilon \sqrt{\Delta t}. \tag{2.17}$$

S é o preço do ativo, ΔS é a variação no preço desse ativo, μ_n o retorno esperado histórico do ativo, σ o desvio padrão histórico do ativo, Δt o período histórico decorrido e ϵ a variável aleatória.

Para um valor inicial S_0 a equação diferencial estocástica possui uma solução, calculada pelo método de Itō.

$$S_t = S_0 * e^{(\mu_n - \frac{\sigma^2}{2})t + \sigma \epsilon \sqrt{t}}. \tag{2.18}$$

A equação 2.18 mostra que para cada período de tempo, nosso modelo assume que haverá uma flutuação no preço de acordo com o retorno esperado do ativo com um desconto de volatilidade. Essa flutuação no preço é chamada de drift. O drift é calculado por:

$$\text{Drift} = (\mu_n - \frac{\sigma^2}{2})t. \tag{2.19}$$

O valor dessa deriva deve ser descontada ou adicionada de um fator aleatório dependente do tempo que é apresentada pelo segundo termo da equação 2.18.

$$\text{Aleatorio} = \sigma \epsilon \sqrt{t}, \tag{2.20}$$

Com os valores encontrados para a variável aleatória e o drift do sistema, é possível modelar o movimento browniano do ativo em questão , baseado em:

$$S_t = S_0 * e^{(\text{Drift}+\text{Aleatorio})}. \tag{2.21}$$

Assim calcula-se o preço do ativo sempre utilizando o dia anterior como análise. Com cada um dos dias, tomados suas projeções futuras, é possível traçar as curvas de cada um dos diferentes movimentos de Monte Carlo, segundo o número de curvas estipuladas pelo programador.

O resultado de cada uma das curvas traçadas para um ativo fictício é mostrada na figura 2.13. A curva permite mostrar possíveis comportamentos de crescimento de um determinado ativo em um período de 1000 amostras. Cada curva é formada considerando apenas a data anterior e aplicando a Equação (2.21). É essencial analisar as curvas de máximo e mínimo nesse modelo, para identificar o possível comportamento do ativo no período estipulado.

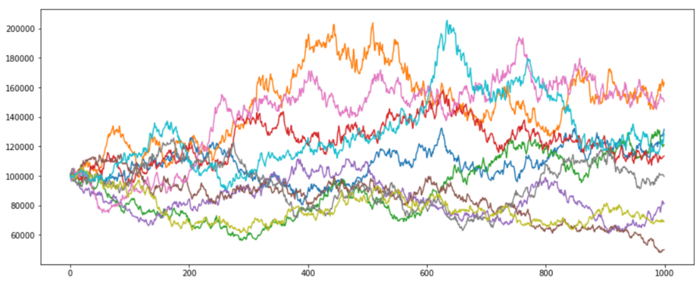


Figura 2.13: Simulação de Monte Carlo pelo Método Browniano

Um dos problemas apresentados no modelo é considerar o mercado financeiro como perfeitamente eficiente, não levando em conta os principais fatores fundamentalistas de uma empresa (Preço/Lucro, divida líquida, patrimônio líquido), que podem fazer com que ocorra grande variação em suas expectativas de retorno, fazendo com que o modelo não se aproxime do valor real, utilizando uma expectativa futura.

2.9 Value At Risk

O *value at risk* ou *var* é uma das análises mais importantes em um modelo de operação quantitativa, para que seja possível um crescimento de capital a longo prazo. Esse modelo propõe uma estimativa do tamanho da perda de uma carteira em determinado período de tempo.

O analista descreve o nível de confiança do modelo, o valor decidido varia entre 90%, 95% ou 99%. Suponha que um investidor com *var* de R$ 10000,00 e nível de confiança de 99%, ele indica que há 99% de probabilidade do investidor perder no máximo um valor específico em seu investimento.

Algumas das principais vantagens do *var* são: sua simplicidade de cálculo e entendimento do modelo, a estratégia para diferentes períodos é simples de ser modificada e seu valor pode ser validado por ativo individualmente ou em conjunto presente no portfólio.

Existem alguns métodos para estimar o *value at risk* de um investimento, o presente artigo apresenta 2 desses modelos: variância-covariância e o método de Monte Carlo.

O modelo baseado na variância-covariância apresenta a fórmula descrita abaixo:

$$Var = P - (P(\alpha(1-c)+1)). \tag{2.22}$$

C é o nível de confiança do modelo (90%, 95%, 99%), P é o valor aplicado no investimento. O α é o inverso da distribuição cumulativa de uma distribuição normal, com média μ e desvio padrão σ. O valor μ é o retorno médio do ativo. No caso, o retorno foi ajustado pela variância e σ é a volatilidade histórica do ativo.

As desvantagens são: a incerteza da magnitude da queda, caso o investimento sofra uma perda maior que a estimada pelo modelo e sua incerteza nas previsões futuras dos investimentos. O modelo é muito útil, todavia não deve ser utilizado isoladamente. Outros mecanismos devem ser considerados para gerenciamento de risco e não deve exagerar no modelo de alavancagem.

Para realizar o modelo é necessário algumas suposições iniciais: Mercado em condições padrões, não considerar eventos extremos com alta volatilidade, o *value at risk* requer uma estimativa de volatilidade e correlação, muitas vezes é difícil de estimar esses valores (isto é, estão sujeitos à grande alteração do mercado) e o retorno dos ativos apresenta distribuição normal, o que não é verídico para a maioria dos ativos.

Capítulo 3

Desenvolvimento

Este capítulo representa toda a análise utilizada para contrapor a teoria econômica apresentada. No primeiro momento, o projeto realiza uma discussão sobre a aproximação do retorno geométrico real de um portfólio por uma fórmula derivada.

Na segunda parte da análise, o projeto visa otimizar o sistema segundo cada um dos modelos adotados e por fim na última etapa utilizamos os resultados obtidos segundo o modelo para fazer a escolha da concentração dos ativos no portfólio.

Utilizaremos ao longo do trabalho, alguns casos particulares da fórmula (α, β)*, equação (2.7), que serão descritos a seguir.*

3.1 Premissas Iniciais

Os dados utilizados na análise são baseados nos retornos mensais de 5 ativos no período de Janeiro de 2010 até Dezembro de 2019. Os ativos escolhidos foram: Ibovespa, Dólar Americano Cotado em Real Brasileiro (USD/BRL), Ouro Spot 250 gramas (OZ1D), Certificado de Depósito Bancário (100% CDI) e Letra do Tesouro Nacional (7% a.a.).A rentabilidade de cada um dos ativos financeiros durante cada um dos instantes de análise está apresentada no anexo II.

Em um primeiro momento, foram comparadas as expectativas de retorno de cada modelo baseado na na fórmula (α, β), equação (2.7), com os retornos reais. Para isso, foram realizadas diversas simulações com as seguintes características de configuração dos portfólios: primeiramente, são 5 portfólios simples de 1 ativo, em seguida 10 portfólios com 2 ativos de distribuição 50-50 e por fim 50 portfólios de distribuição aleatória.

3.2 Retorno Modelo Aritmético - A(0,0)

O primeiro caso é consistente com a teoria padrão de Markowitz, em que o retorno do portfólio é obtido através da ponderação das médias de retorno de cada ativo pelo peso do ativo na carteira total. Nesse caso específico da equação (2.7), a equação equivalente é dada por

$$G = R, \tag{3.1}$$

onde R é dado por

$$R \sum_{i=1}^{n} w_i \cdot R_i, \tag{3.2}$$

e w_i e R_i são os pesos e retornos do i-ésimo ativo na carteira.

O gráfico abaixo da Retorno Modelo A(0,0) x Retorno Real mostra a relação dos retornos do modelo utilizado pelo retorno real. A reta vermelha mostra uma relação unitária, ou seja, a região na qual o modelo se aproxima perfeitamente a realidade. A mesma análise será feita adiante para os demais modelos.

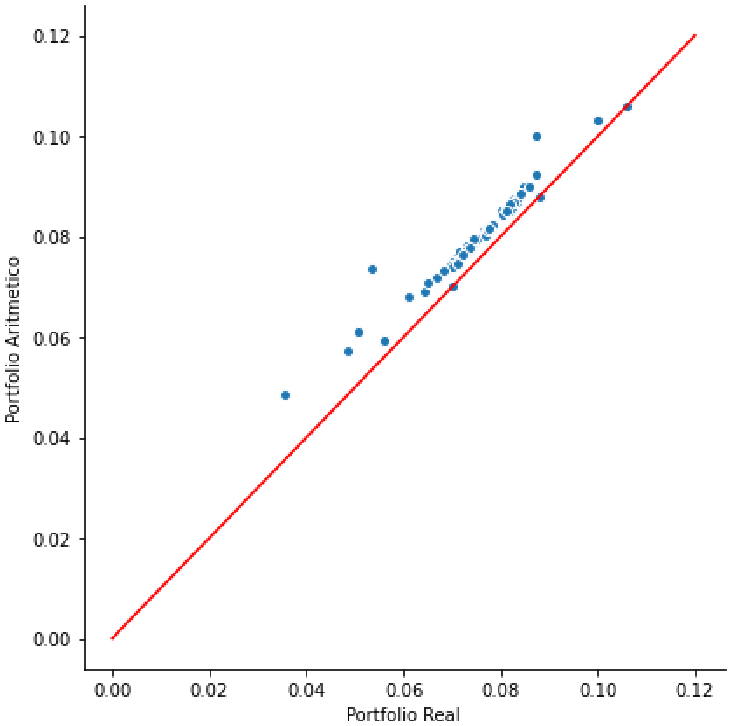


Figura 3.1: Retorno Modelo A(0,0) x Retorno Real

Nota-se, pela análise da simulação, que o modelo utilizado por Markowitz tende a superestimar os retornos dos portfólios. Esse fator acaba sendo prejudicial, uma vez que estimula uma maior tomada de risco sem haver necessariamente um maior retorno.

Esse ponto pode ser mais claramente compreendido ao analisarmos o índice de Sharpe, considerando o retorno real do portfólio e o retorno do modelo A(0,0) (Markowitz tradicional). A equação (2.14) mostra que o índice é diretamente proporcional ao retorno do portfólio.

Sendo assim, como a volatilidade é a mesma e os dois portfólios diferem apenas com relação ao retorno, o modelo de Markowitz apresenta índice de Sharpe maior do que o real.

3.3 Retorno Modelo Geométrico - G(0,0)

Nesse segundo caso, analisou-se a aproximação do retorno do portfólio com base na média geométrica dos retornos dos ativos. Esse caso é relevante uma vez que o mercado financeiro segue a lógica de juros compostos, fazendo com que maiores variações em relação à média tenham efeitos mais adversos.

Tal fato é trivialmente comprovado através da conhecida desigualdade das médias, que mostra que, para uma amostra qualquer, a média geométrica é sempre menor ou igual à aritmética.

Esse cenário é o caso específico da equação (2.7), no qual o retorno do portfólio é dado apenas pela ponderação das médias geométricas dos retornos dos ativos, pelo peso deles na carteira total. Desse modo, o retorno do modelo é dado por

$$G = \sum_{i=1}^{n} w_i \cdot G_i, \tag{3.3}$$

onde novamente w_i é o peso de cada ativo na carteira e G_i a média dos retornos geométricos de cada ativo.

O gráfico abaixo da Retorno Modelo G(0,0) x Retorno Real mostra a relação dos retornos do modelo em comparação com o retorno real de cada portfólio. Em consonância com o que foi feito para o caso anterior, a reta vermelha demonstra a região de equiparação dos retornos, i.e., a região na qual o modelo representa fielmente o caso real.

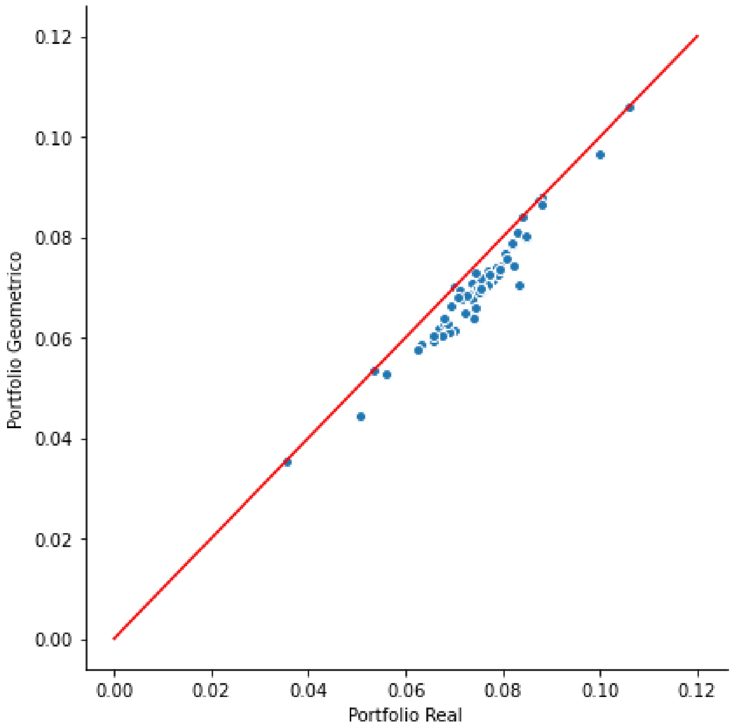


Figura 3.2: Retorno Modelo G(0,0) x Retorno Real

Aqui se observa um resultado contrário ao do modelo anterior. Enquanto a média aritmética tende a superestimar os retornos, a média geométrica os subestima. Esse resultado é também negativo uma vez que influencia uma maior tomada de risco para obter uma rentabilidade desejada.

3.4 Retorno Modelo Aritmético A(1,0)

Partimos agora para a análise do primeiro modelo de aproximação proposto. Esse é o caso A(1,0) da equação (2.7). Assim, a tendência do modelo A(0,0) de superestimar o retorno do portfólio é compensada por um desconto de volatilidade, como mostrado abaixo. Com isso, quanto maior a volatilidade de um dado portfólio, a estimativa para o retorno será proporcionalmente menor.

A principal vantagem desse cenário em relação ao A(0,0) é que um aumento de volatilidade do portfólio deve ser compensado por um retorno exponencialmente maior, para que seja mantida a eficiência do portfólio. Desse modo, o modelo passa a ser mais ajustado para lidar com o ambiente de juros compostos do mercado financeiro.

Para esse modelo, a aproximação do retorno do portfólio é dada por

$$G = R - \frac{V}{2}, \tag{3.4}$$

onde R é o retorno aritmético do portfólio, como apresentado na equação (3.2) e Vol é a volatilidade do portfólio, calculada através da equação (2.4).

Novamente, o gráfico Retorno Modelo A(1,0) x Retorno Real mostra a relação dos retornos entre o modelo utilizado e o real, com a reta em vermelho sendo a região de equivalência.

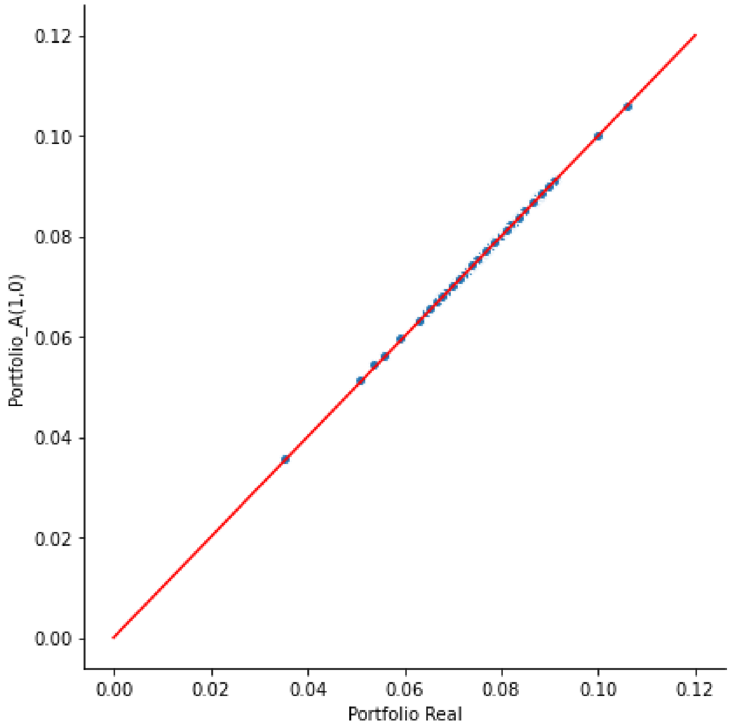


Figura 3.3: Retorno Modelo A(1,0) x Retorno Real

Nota-se de imediato que, ao contrário dos modelos A(0,0) e G(0,0) previamente utilizados, a aproximação do modelo A(1,0) é muito mais satisfatória, com uma divergência muito baixa em relação ao resultado real e sem nenhuma tendência de desvio clara.

3.5 Retorno Modelo Aritmético A(1,1)

Assume-se agora um incremento a mais no modelo em relação à aproximação A(1,0), considerando-se uma correção do desconto de volatilidade ajustado pelo retorno do portfólio. A principal diferença desse modelo para o anterior é que agora o desconto de volatilidade leva em conta o retorno, de tal modo que há uma correção na relação exponencial entre retorno e volatilidade previamente citada.

A equação equivalente do modelo A(1,1) é dada por

$$G = R - \frac{V}{2(1+R)}. \tag{3.5}$$

A relação entre o retorno do modelo e o retorno real está mostrada no gráfico Retorno Modelo A(1,1) x Retorno Real abaixo. Uma vez mais, a reta vermelha demonstra a região de equivalência do modelo com o real.

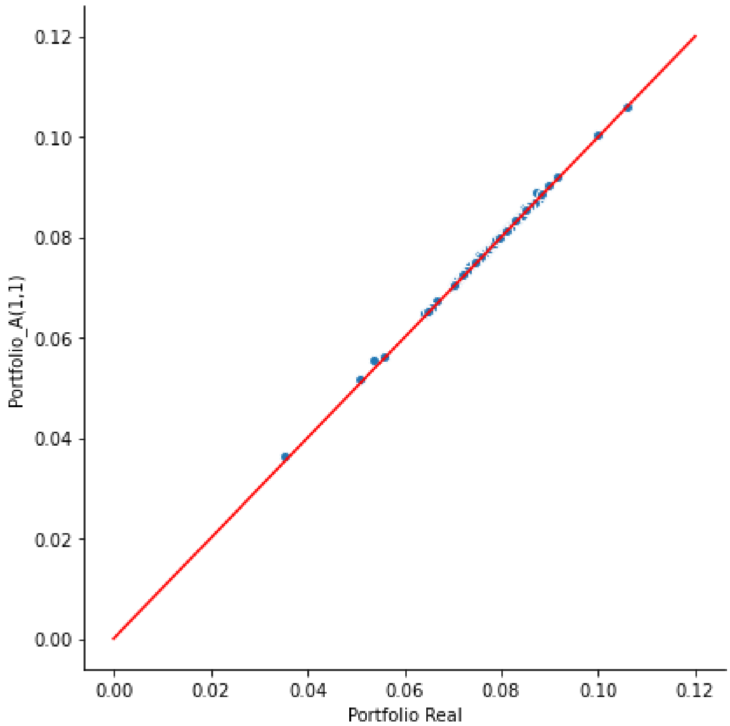


Figura 3.4: Retorno Modelo A(1,1) x Retorno Real

Um resultado interessante em comparação ao caso anterior é que o modelo A(1,1) tem uma tendência a aproximar melhor portfólios com retornos maiores, e consequentemente maiores volatilidades, em detrimento de portfólios com retornos menores, baixas volatilidades. Esse fato é consequência do ajuste realizado pelo retorno.

3.6 Retorno Modelo Geométrico G(1,0)

Seguindo, começa agora a análise dos modelos que utilizam como base de cálculo a média geométrica dos retornos dos ativos. Os dois modelos $A(\alpha, \beta)$ têm o problema de serem baseados na média aritmética dos ativos e não na média geométrica. Para resolver tal detrator, passa-se a utilizar a fórmula (α, β) também para cada ativo de forma individual, além de para o portfólio como um todo.

Torna-se necessário, então, converter os retornos geométricos em aritméticos, de modo a aplicar o resultado na equação do modelo. Para tal, utiliza-se inversão da fórmula (α, β), dada pela equação (2.9).

Para esse caso, tem-se $\alpha = 1$ e $\beta = 0$, de modo que a conversão do retorno geométrico em aritmético é dado pela fórmula

$$R_i^* = G_i + \frac{V_i}{2}. \tag{3.6}$$

Denota-se R_i^* como a média pseudo-arimética de cada ativo. Com o resultado obtido, utiliza-se a equação (3.2) para obter o retorno pseudo-arimético R^* do portfólio. Por fim, aplica-se o resultado na equação do modelo, dada por

$$G = R^* - \frac{V}{2}. \tag{3.7}$$

O gráfico Retorno Modelo G(1,0) x Retorno Real abaixo mostra a relação entre o retorno modelado e o retorno real. Novamente, a reta em vermelho mostra a região onde o modelo perfeitamente se aproxima do caso real.

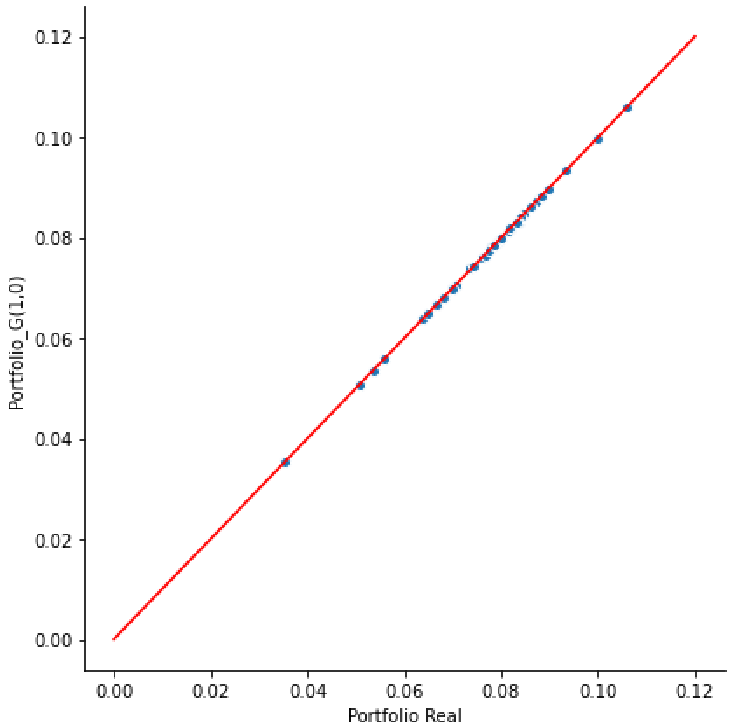


Figura 3.5: Retorno Modelo G(1,0) x Retorno Real

Nota-se que nesse caso a estimação do retorno para portfólios de um único ativo é mais exata, conforme planejado. Ademais, o fato de o modelo tomar como base uma média geométrica para estimar o retorno dos ativos torna o embasamento desse modelo mais verossímil.

3.7 Retorno Modelo Geométrico G(1,1)

No último caso de análise, utiliza-se, novamente, como base a média geométrica individual de cada ativo constituinte do portfólio. Esse último modelo difere do anterior pelo fato de ajustar o desconto da volatilidade pelo retorno, havendo assim uma correção na relação exponencial entre o retorno e a volatilidade, como ocorre no Modelo Geométrico G(1,0).

O retorno do portfólio para esse modelo é obtido através da conversão da média geométrica de cada ativo individualmente em uma média pseudo-aritmética, como foi feito anteriormente. Para tal, utiliza-se a equação (2.9) com $(\alpha, \beta) = (1, 1)$. Tem-se, então

$$R^* = \frac{2G + V}{1 - G + \sqrt{(1+G)^2 + 2V}}. \tag{3.8}$$

Aplica-se o resultado obtido na equação (2.7) equivalente do modelo para obter-se o retorno geométrico do portfólio total, dado por

$$G = R^* - \frac{V}{2(1 + R^*)}. \tag{3.9}$$

O gráfico Retorno Modelo G(1,1) x Retorno Real abaixo mostra a relação entre o resultado obtido e a realidade, com a linha vermelha representando a região de equivalência entre o modelo e o caso real.

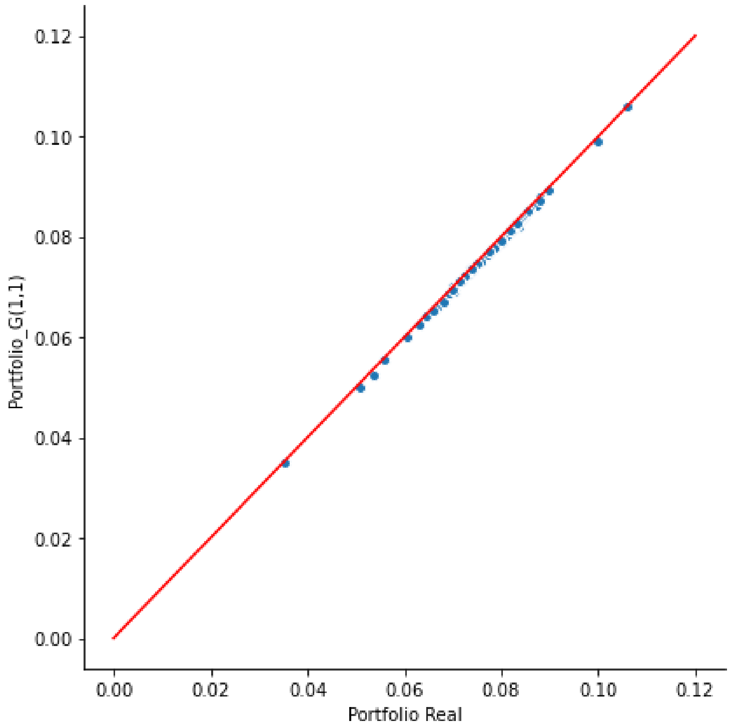


Figura 3.6: Retorno Modelo G(1,1) x Retorno Real

Pela análise do resultado, percebe-se que, novamente, esse modelo se aproxima da realidade de forma bastante satisfatória, reforçando a validade da aproximação utilizada.

3.8 Conclusões Iniciais

Ficou demonstrado, a partir do estudo, que os quatro últimos casos da fórmula (α, β) possuem resultados bastante satisfatórios no tocante à aproximação do retorno real de um ativo individual, bem como de um portfólio de ativos.

Tal correspondência é importante, pois em um ambiente altamente incerto, quanto o mercado financeiro, é de grande valor que a quantidade de erros agregados na análise seja a menor possível.

Ademais, em comparação com as técnicas convencionais que utilizam uma aproximação pela média aritmética dos retornos dos ativos, equivalente ao modelo A(0,0) apresentado no início da seção. As demais propostas de modelagem tem a considerável vantagem de não fornecer um resultado superestimado, que pode induzir um investidor a ter uma falsa previsão de rentabilidade.

Na sequência desse projeto serão utilizados os modelos A(1,0), A(1,1), G(1,0) e G(1,1), para realizar as análises subsequentes, uma vez que todos apresentaram bons resultados. Além disso, o caso tradicional de média aritmética dos retornos, modelo A(0,0) acima, será também frequentemente utilizado como referência.

Capítulo 4

Aplicações

Nesse capítulo, serão abordadas aplicações posteriores a partir da análise realizada no capítulo anterior. A ideia é testar a aplicabilidade do modelo estudado em situações de predição da rentabilidade futura dos ativos. A partir de estimações de retornos futuros, será construído o portfólio otimizado do modelo levando também em conta o critério de Kelly. O resultado obtido será aplicado em uma simulação de Monte Carlo e parâmetros como value at risk e correlação do resultado serão analisados.

4.1 Introdução

O foco da seção anterior foi determinar uma modelagem adequada ao retorno de um portfólio de ativos de investimento. Feito isso, busca-se agora definir uma estratégia de otimização de portfólios que possa se valer da modelagem realizada, para obter melhores resultados.

A estratégia a ser utilizada consiste em realizar uma adaptação da teoria de Markowitz, substituindo a aplicação da média aritmética dos retornos por um retorno geométrico, conforme as modelagens efetuadas. Desse modo, almeja-se encontrar o portfólio com maior índice de Sharpe e o portfólio com menor volatilidade seguindo a estratégia de retorno geométrico.

Vale lembrar, nesse ponto, que a estratégia de Markowitz permite a obtenção de portfólios com relação risco/retorno otimizada, gerando mais eficiência na alocação da carteira de investimentos, o que é bastante desejável. A partir disso, torna-se possível realizar uma alavancagem da carteira para obter-se retornos mais elevados, mantendo uma boa relação risco/retorno.

A alavancagem da carteira será, em seguida, realizada tomando como base a aplicação do Critério de Kelly ao portfólio otimizado em relação ao Sharpe.

Uma outra abordagem de interesse a ser analisada, é a mescla de caixa (investimento livre de risco) ao portfólio ótimo na composição da carteira total. A vantagem dessa manipulação é a obtenção de portfólios eficientes com níveis de risco menores do que os disponíveis utilizando apenas ativos de risco. Outro aspecto positivo consiste no fato de o caixa normalmente ter mais liquidez que os ativos de risco utilizados.

Comprovada a eficácia do modelo, serão utilizados agora os seguintes ativos de risco na composição do portfólio a ser otimizado: Ibovespa (IBOV), S&P 500 (SPX), Ouro Spot 250 gramas (OZ1D).

Vale dizer que a otimização do método de Markowitz para ativos de volatilidade igual a zero ou próxima desse valor, quando comparado com ativos com alta volatilidade, torna-se impreciso, uma vez que ao calcular o índice de Sharpe, ocorre uma premiação de portfólios com alta alocação em ativos com baixa volatilidade. Esse fato é explicado ao considerarmos o método de cálculo do índice apresentado na equação (2.14). Nota-se que quando $V_1 \to 0 \Rightarrow S \to \infty$.

4.2 Otimização com Base em Dados Históricos

Em um primeiro momento, buscamos encontrar os portfólios otimizados com relação ao máximo Sharpe e à mínima volatilidade para cada modelo de retorno geométrico apresentado previamente. Para tal, foram consideradas as rentabilidades diárias históricas para os ativos utilizados entre 01/01/2010 (primeiro de janeiro de dois mil e dez) e 31/12/2019 (trinta e um de dezembro de dois mil e dezenove). A tabela 4.1 abaixo demonstra as médias aritméticas e geométricas de retorno dos ativos, e a volatilidade de cada um no período de análise. Os valores apresentados são anualizados.

Ativo	**Retorno Aritmético**	**Retorno Geométrico**	**Volatilidade**
IBOV	8,21%	5,46%	22,68%
SPX	13,01%	11,73%	15,10%
OZ1D	15,97%	13,39%	21,23%

Tabela 4.1: Retornos e volatilidades dos ativos

Um detalhe interessante que vale à pena ser ressaltado aqui, é o fato de os retornos geométricos serem sempre menores que os aritméticos, como era esperado em decorrência da desigualdade das médias.

Com os dados históricos obtidos, foram simulados vinte e cinco mil portfólios aleatórios com diferentes distribuições entre os ativos, para cada um dos modelos em análise. Assim, obtiveram-se os portfólios com maior Sharpe e menor volatilidade para cada caso bem como a fronteira eficiente de cada modelo.

As tabelas 4.2 e 4.3 mostram as distribuições do portfólio para cada ativo, bem como a rentabilidade, volatilidade e índice de Sharpe da carteira total, tomando como base os dados históricos de cada ativo.

Ativo	Markowitz	A(1,0)	A(1,1)	G(1,0)	G(1,1)
IBOV	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%
SPX	60,04%	60,21%	60,17%	60,36%	60,49%
OZ1D	39,96%	39,79%	39,83%	39,64%	39,51%
Retorno	14,19%	13,58%	13,66%	13,36%	13,24%
Volatilidade	11,01%	11,00%	11,00%	11,00%	10,99%
Sharpe	1,11	1,05	1,06	1,03	1,02

Tabela 4.2: Distribuição dos ativos - Máximo Sharpe

Um detalhe interessante de ser notado na tabela 4.2, é que as distribuições são praticamente as mesmas para cada modelo analisado, diferindo apenas o retorno estimado, a volatilidade e o Sharpe.

Percebe-se que, como demonstrado na seção anterior, o modelo de Markowitz tradicional tende a superestimar o retorno de um portfólio, em decorrência de utilizar a média aritmética pura como parâmetro.

Outro ponto curioso é que, para o período de análise, o IBOV é um ativo puramente ineficiente para maximização do Sharpe da carteira, em decorrência de sua alta volatilidade aliada a um baixo retorno.

Ativo	Markowitz	A(1,0)	A(1,1)	G(1,0)	G(1,1)
IBOV	11,29%	11,29%	11,29%	11,29%	11,29%
SPX	52,37%	52,37%	52,37%	52,37%	52,37%
OZ1D	36,34%	36,34%	36,34%	36,34%	36,34%
Retorno	13,54%	12,97%	13,03%	12,75%	12,62%
Volatilidade	10,74%	10,74%	10,74%	10,74%	10,74%
Sharpe	1,07	1,02	1,03	1,00	0,99

Tabela 4.3: Distribuição dos ativos - Mínima Volatilidade

Observando a tabela 4.3, nota-se que, nesse caso, todas as distribuições dos modelos foram idênticas, bem como as volatilidades dos portfólios otimizados. Tal equivalência pode ser simplesmente explicada considerando-se que todos os modelos possuem o mesmo cálculo de volatilidade e, como não há interferência da volatilidade no retorno, os portfólios de menor risco de cada modelo devem necessariamente possuir mesmas distribuições e mesma volatilidade.

Os gráficos a seguir mostram todos os portfólios simulados com seus riscos e retornos calculados para cada modelo. Ademais, cada ponto da simulação apresenta coloração conforme a régua à direita, que demonstra o valor do Sharpe de cada portfólio.

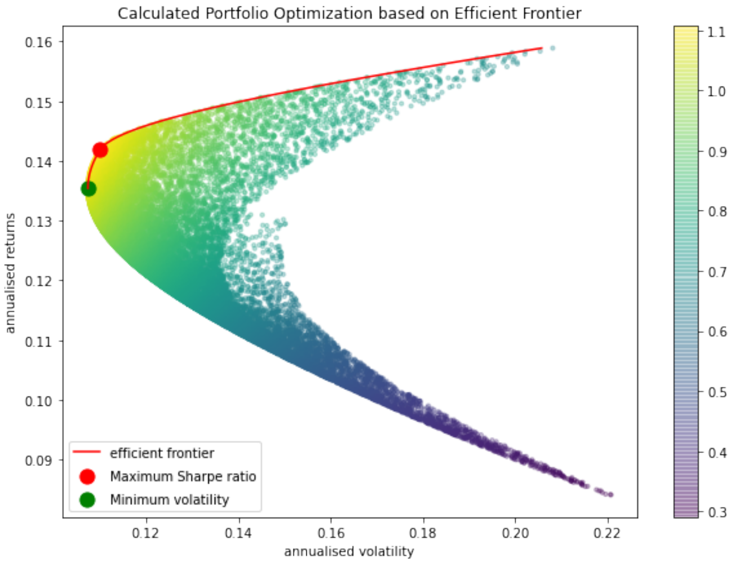


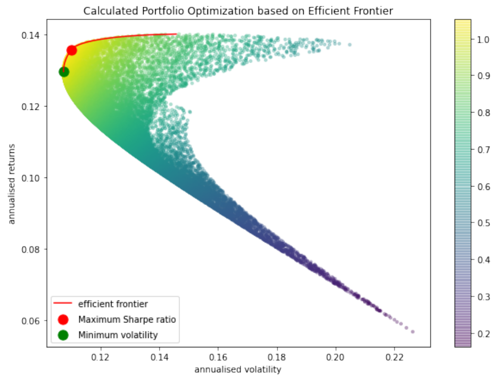
Figura 4.1: Fronteira eficiente - Modelo de Markowitz

A figura 4.1 acima mostra o resultado da simulação utilizando o modelo de retorno de Markowitz. O gráfico mostra a relação *volatilidade x retorno* de cada um dos vinte e cinco mil portfólios simulados. A linha vermelha no gráfico mostra a fronteira eficiente da simulação, local onde o retorno é máximo para cada nível de volatilidade.

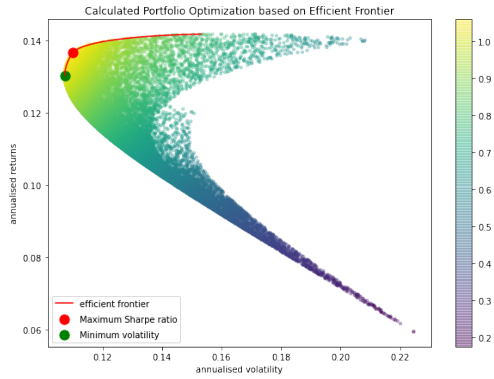
Vale lembrar que qualquer portfólio fora dessa linha não é eficiente, uma vez que é possível obter uma outra composição da carteira ou com menos risco para o mesmo retorno ou com maior retorno para o mesmo risco.

No gráfico são mostrados também onde estão os portfólios de maior Sharpe e de mínima volatilidade dentro da fronteira eficiente. As composições desses portfólios para o modelo de Markowitz estão mostradas nas tabelas 4.2 e 4.3 acima.

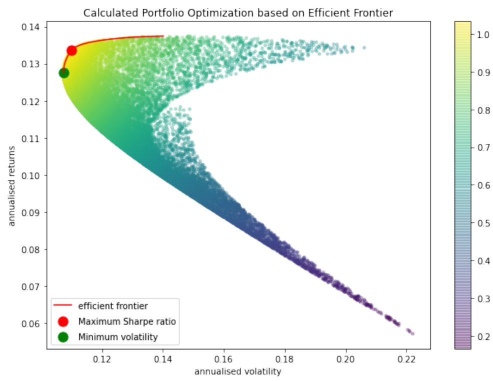
Os resultados das simulações, utilizando os modelos A(1,0), A(1,1), G(1,0) e G(1,1) propostos, estão mostrados nas figuras abaixo.



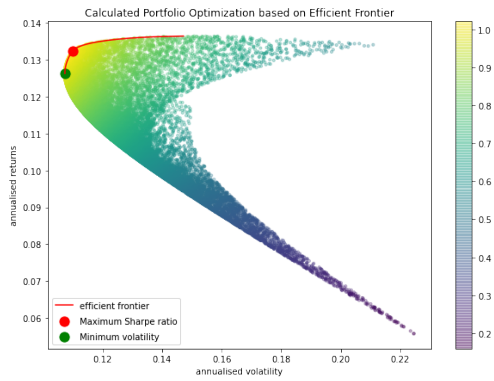
(a) Modelo A(1,0)



(b) Modelo A(1,1)



(c) Modelo G(1,0)



(d) Modelo G(1,1)

Figura 4.2: Fronteiras eficientes dos modelos propostos

Como esperado, pelo que foi visto na análise da aproximação dos retornos dos modelos no capítulo 3, as simulações dos modelos são bastante próximas entre si.

Há, no entanto, uma pequena diferença que pode passar despercebida, mas que é de fundamental importância para a análise dos casos. Enquanto o modelo tradicional de Markowitz possui uma fronteira eficiente crescente, indicando uma maior gama de portfólios otimizados, o ajuste de volatilidade feito pelos modelos limita a fronteira eficiente a um ponto com retorno intermediário.

Esse fato indica que na realidade nem todo portfólio de Markowitz com retorno máximo para um determinado nível de volatilidade é de fato eficiente.

Vale dizer também que há pequenas diferenças nas fronteiras eficientes de cada modelo, fato esse que pode ser justificado pela equação de cada um deles apresentar resultados ligeiramente díspares, não representando, contudo, uma diferença fundamental como na comparação com o modelo de Markowitz.

4.3 Modelos Preditivos

A partir da otimização, com base em dados históricos, foi possível constatar a validade dos modelos, bem como as diferenças fundamentais com relação à teoria mais comumente utilizada.

A ideia, agora, passa a ser de estimar retornos futuros para cada ativo utilizado e, a partir daí, encontrar portfólios otimizados a serem utilizados.

Nesse ponto, define-se predição como a tentativa de estimar retornos futuros para cada ativo. A seguir será detalhada a estratégia utilizada nesse trabalho para cada ativo utilizado.

Justifica-se essa estratégia pelo fato de que o mercado financeiro possui características fortemente estocásticas, i.e., os retornos futuros independem dos retornos passados. Com isso, uma estratégia que se baseie em dados históricos, acaba por agregar mais erros à análise, o que não é desejável.

A seguir serão detalhadas as estratégias utilizadas para fazer estimativas de retorno de cada um dos ativos de risco considerados (IBOV, SPX, OZ1D).

4.3.1 Estratégia para Predição do IBOV

O método utilizado para estimar o retorno do IBOV consiste em utilizar o indicador preço sobre lucro (P/L). Como explicado no capítulo 2, o indicador P/L mostra uma relação do preço de mercado de uma determinada empresa ou conjunto de empresas com o lucro dessas empresas ao longo de um ano. Pode-se interpretar esse indicador como sendo uma perspectiva de quantos anos é necessário investir em uma empresa, para que o lucro se iguale ao valor pago no início.

A partir desse entendimento, é possível, então, realizar uma conta reversa para estimar o retorno anualizado. O cálculo é feito da seguinte forma: considere uma rentabilidade anualizada x para uma determinada empresa. Sabe-se que após P/L anos a rentabilidade será de 100%. É possível então escrever

$$(1+x)^{P/L} = 2 \Rightarrow x = \sqrt[P/L]{2} - 1 \tag{4.1}$$

Afim de ajustar o cálculo do retorno com base no P/L, adiciona-se uma rentabilidade adicional de 4% ao resultado obtido. Essa adição parte do princípio que o retorno real de uma empresa deve ser corrigido pela inflação que apresenta o valor médio histórico de 4%.

Assim, a estimativa final a ser utilizada para o retorno x do IBOV é dada pela equação (4.2) abaixo.

$$x = \sqrt[P/L]{2} - 1 + 4\% \tag{4.2}$$

É importante frisar que essa estratégia de predição de rentabilidade com base no P/L é também válida para o caso de um índice de ações, como o IBOV, uma vez que é possível calcular uma estimativa de P/L para o índice em si com base na composição da carteira.

Uma ressalva a ser feita nesse ponto é com relação a ativos com elevados indicadores P/L. Atualmente ocorre um fenômeno com algumas empresas de tecnologia e elevado crescimento que faz com que elas sejam negociadas a múltiplos muito acima do usual, sem que isso tenha efeito sobre suas perspectivas de rentabilidade. Assim, faz-se necessário pontuar que essa estratégia de predição não é aplicável a ativos com tal característica. No entanto, como o projeto busca realizar aplicações em índices, que por sua diversificação intrínseca não possuem valores tão elevados de P/L, tal complicação pode ser desconsiderada na sequência desse trabalho.

4.3.2 Estratégia para Predição do SPX

A estratégia utilizada para predição do retorno do SPX é essencialmente a mesma daquela do IBOV. Todas as considerações previamente feitas são igualmente válidas para o índice americano. Desse modo, a predição de retorno anualizado para o SPX é também dada pela equação (4.2).

Na análise apresentada, o SPX é considerado hedgeado em dólar. Ou seja, não é preciso considerar sua variação naquela moeda. Isso é essencial, pois uma nova estimativa de preço de dólar futuro faria com que a estimativa se aproximasse ainda menos do valor real obtido. Em qualquer sistema, quanto mais aproximações são realizadas em seu modelo, menor a probabilidade da estimativa convergir para a realidade.

4.3.3 Estratégia para Predição do OZ1D

O caso mais sensível para análise é a predição do retorno futuro do OZ1D (ouro), uma vez que, ao contrário do SPX e do IBOV, o ouro não é por si só um ativo capaz de gerar valor, atuando na realidade como reserva de valor.

Como mencionado no capítulo 2, uma característica interessante do ouro, a partir da qual é possível deduzir um modelo preditivo, é o fato de que ele tende a valorizar com maiores quantidades de oferta monetária na economia, uma vez que funciona como um ativo defensivo contra a inflação.

Como exposto, existe uma correlação considerável entre a expansão da base monetária do M2 e o preço do ouro, que fica ainda mais considerável se considerarmos um desconto da demanda por dinheiro na economia através da dedução do "Trade Weighted U.S. Dollar Index", como demonstrado na figura 2.4.

Assim, a estratégia adotada para predição de rentabilidade futura do ouro consiste em utilizar a variação percentual anualizada da expansão da base monetária do M2, dividida pela variação do "Trade Weighted U.S. Dollar Index", ao longo dos últimos dois meses. A opção por utilizar o valor dos últimos dois meses se deve ao fato de esse período refletir melhor movimentos de curto prazo, sendo ao mesmo tempo longo o suficiente para desconsiderar quaisquer ruídos e variações pequenas.

Cabe aqui a ressalva de que, apesar de existir uma correlação considerável entre os dois fatores, existem certos períodos em que essa correlação é consideravelmente reduzida, o que no entanto não invalida a estratégia pensando em períodos de tempo mais longos.

4.3.4 Otimização com Base em Dados Preditivos

Diante do exposto, foram utilizados os seguintes valores como estimadores de retorno para cada um dos ativos, mostradas na tabela 4.4 abaixo.

Ativo	P/L	Estimativa de Retorno Anualizado
IBOV	16,66	8,25%
SPX	36,13	5,94%
OZ1D	-	7,22%

Tabela 4.4: Estimativas de retorno para cada ativo

Com os valores obtidos, foram novamente simulados vinte e cinco mil portfólios com distribuições aleatórias de pesos para cada ativo a fim de obter os portfólios com maior índice de Sharpe e menor volatilidade. As distribuições do portfólio com máximo índice de Sharpe estão mostrados na tabela 4.5 abaixo.

Ativo	Markowitz	A(1,0)	A(1,1)	G(1,0)	G(1,1)
IBOV	26,61%	24,81%	24,99%	27,88%	27,59%
SPX	33,24%	35,50%	35,28%	31,01%	31,39%
OZ1D	40,15%	39,69%	39,73%	41,11%	41,02%
Retorno	7,07%	6,41%	6,45%	8,47%	8,34%
Volatilidade	11,19%	11,09%	11,10%	11,29%	11,27%
Sharpe	0,45	0,40	0,40	0,57	0,56

Tabela 4.5: Distribuição dos ativos utilizando as estimativas de retorno - Máximo Sharpe

Pelo fato de não terem sido feitas modificações no cálculo da estimativa de volatilidade, a distribuição dos ativos para o portfólio com mínima volatilidade não sofreu alterações, sendo igual à apresentada na tabela 4.3. Feita essa consideração, a partir de agora será apenas considerado o portfólio com maior Sharpe para fins de análise.

A simulação do modelo tradicional de Markowitz está mostrada na figura 4.3 abaixo.

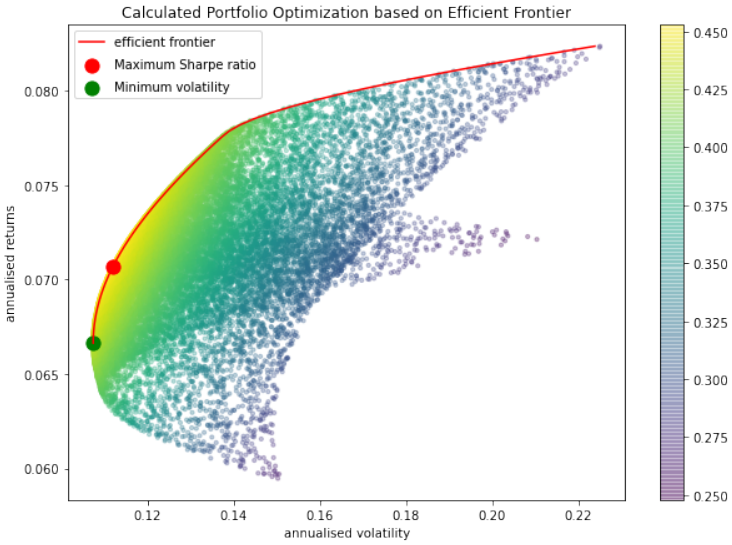
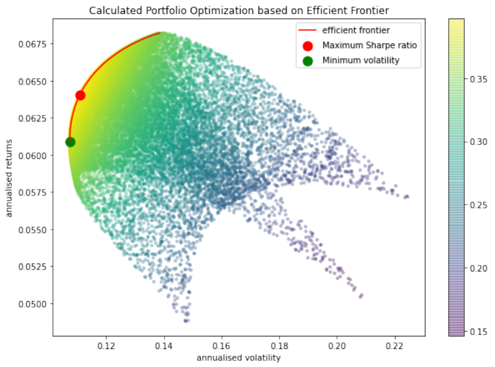


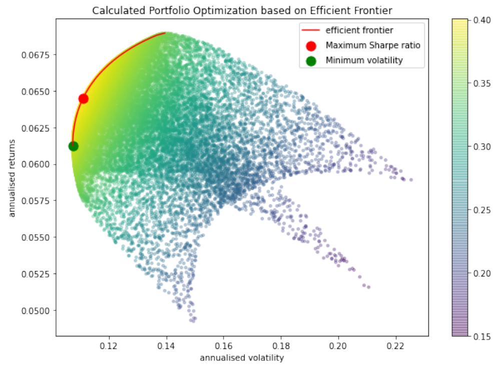
Figura 4.3: Fronteira eficiente - Modelo de Markowitz com estimativas de retorno

Novamente, um ponto interessante a ser observado na fronteira eficiente de Markowitz é a tendência de crescimento dos retornos em conjunto com a volatilidade. Desse modo, a fronteira eficiente do modelo se estende por uma gama maior de níveis de risco.

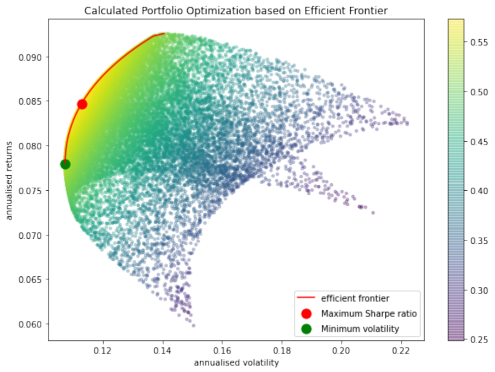
As figuras 4.4 refletem um comportamento bastante díspar com relação ao modelo de Markowitz. Essa diferença é justificada principalmente pelo desconto da volatilidade utilizado nos modelos. Como pode ser observado, esse fato faz com que as fronteiras eficientes de cada modelo fiquem limitadas a uma faixa mais específica de volatilidade.



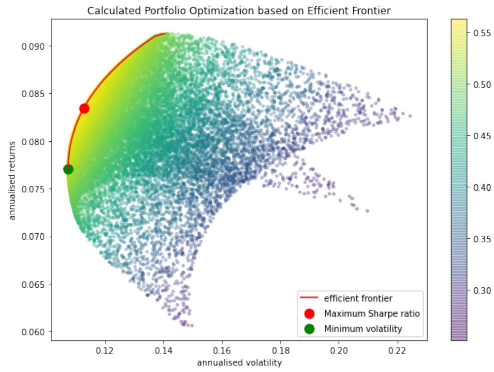
(a) Modelo A(1,0)



(b) Modelo A(1,1)



(c) Modelo G(1,0)



(d) Modelo G(1,1)

Figura 4.4: Fronteiras eficientes dos modelos com estimativas de retorno

4.3.5 Bônus de Rebalanceamento

Uma consideração importante a ser feita diz respeito ao prazo de rebalanceamento do portfólio. Em teoria, um rebalanceamento frequente favorece a rentabilidade geral do portfólio. No entanto, se forem considerados custos de transação e outras taxas os custos podem superar os ganhos. Dito isso, opta-se por fazer uma redistribuição semanal da carteira de modo a minimizar os custos e maximizar o efeito positivo.

Outro ponto muito necessário na análise de rebalanceamento é que as previsões tomadas visam obter um resultado mais expressivo a curto prazo, assim o rebalanceamento deve sempre ocorrer para que as novas predições tomadas e as possíveis alterações na volatilidade e correlação entre os ativos seja levada em consideração e a operação possa trazer maior retorno a longo prazo.

Nas simulações apresentadas no texto a seguir, o rebalanceamento de 7 dias não foi considerado no cálculo da rentabilidade histórica, contudo sua teoria será utilizada no momento da implementação da estratégia.

4.3.6 Adição de Caixa

Uma estratégia bastante interessante que pode ser utilizada após a obtenção do portfólio com maior índice de Sharpe, é a adição de caixa (renda fixa livre de risco) à carteira de modo a reduzir a volatilidade da carteira como um todo.

A ideia consiste, agora, em considerar o portfólio completo como sendo um único ativo de risco, com características próprias de risco e retorno. A partir disso é possível fazer uma ponderação de pesos entre o próprio portfólio otimizado e o caixa, para obter resultados eficientes em qualquer nível de risco inferior ao do portfólio. A figura 4.5 abaixo demonstra as iterações de possíveis portfólios obtidos, a partir da ponderação de diferentes pesos entre a carteira com máximo Sharpe e caixa.

Cada um dos pontos é deslocado de 1% de caixa, assim é possivel determinar a concentração dos ativos livres de risco tomando cada ponto da simulação. Outra forma possível de determinar esses ativos é dividir a *vol* da carteira pela *vol* dos ativos com risco. O caixa não possui risco, quanto mais caixa inserido no sistema menor volatilidade. Contudo, ao aumentar o caixa do sistema, o retorno do seu portfólio tende a diminuir, pois o caixa possui menor retorno.

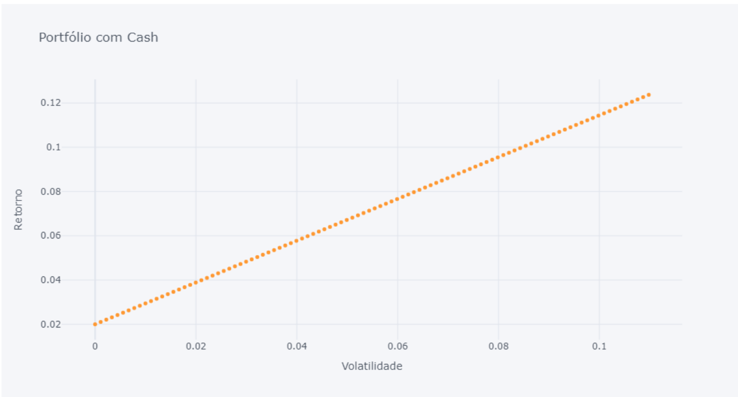


Figura 4.5: Retorno x Volatilidade - Porfólios com Cash

Um ponto importante que deve ser notado é que a utilização dessa estratégia torna ineficiente a própria utilização do portfólio com mínima volatilidade previamente obtido, uma vez que é possível obter um ou outro com o mesmo nível de risco, mas um retorno maior e ainda outro com o mesmo retorno, mas um risco menor.

4.3.7 Critério de Kelly

Uma última aplicação interessante a partir da otimização do portfólio, é o Critério de Kelly, segundo o qual, é possível obter um múltiplo que, aplicado à exposição geral do portfólio, maximiza o retorno geométrico no longo prazo. O cálculo desse múltiplo é dado através da equação (2.16), repetida abaixo:

$$f_i = \frac{\mu_i}{\sigma_i^2}. \tag{4.3}$$

Onde f_i é o percentual de alavancagem que deve ser aplicado ao portfólio, μ_i é a expectativa de retorno subtraída do retorno livre de risco e σ_i é a volatilidade (desvio padrão) esperada.

Para os parâmetros utilizados na simulação do modelo A(1,0), foram calculados 1/4 das frações de Kelly para cada distribuição de alocação entre portfólio com máximo Sharpe e caixa. A curva com os números de 1/4 de Kelly, para cada percentual de alocação no portfólio, está mostrada na figura 4.6.

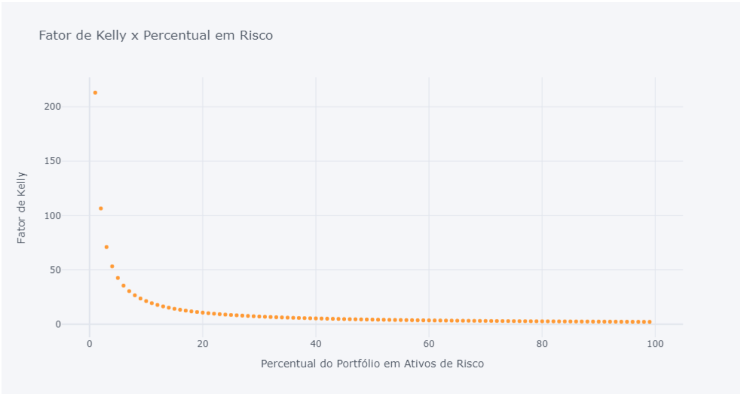


Figura 4.6: Percentual de alocação no portfólio x Critério de Kelly

Ademais, alguns valores do cálculo estão mostrados na tabela 4.6 abaixo a fim de melhor exemplificar o modelo.

Alocação no Portfólio	**1/4 Kelly**
100%	0,89
75%	1,18
50%	1,77
25%	3,54
10%	8,86
1%	88,63

Tabela 4.6: Critério de Kelly para diferentes alocações no portfólio

Uma das principais críticas ao critério de Kelly consiste no fato de deixar a carteira exposta a grandes variações, tanto positivas quanto negativas. Por esse motivo, é usual utilizar frações do valor efetivo de Kelly. Para esse trabalho foi escolhido 1/4 de Kelly. Esse valor é factível para ser usado como alavancagem devido ao seu método conservador, obtendo valores nas simulações de no máximo 50% de alavancagem pelo critério de Kelly, um valor possível de alavancagem nas principais corretoras da Bolsa de Valores Brasileira.

Um indicador muito utilizado para cálculo de alavancagem é a a Dívida Líquida /EBITDA, assim é possível calcular quantas vezes o capital da empresa está sendo utilizado para investimento. Como o portfólio proposto utiliza o índice e não uma empresa específica, optou-se por utilizar o critério de Kelly e não a análise baseada nos fundamentos da empresa.

O custo do empréstimo para alavancagem não foi considerado na análise, pois cada corretora possui um valor de juros diferente para implementação da estratégia. O modelo implementado é atemporal e para análise do resultado final da estratégia deve-se considerar a taxa de juros do empréstimo utilizado para alavancagem.

4.4 Análise de Resultados

Com a relação de Kelly determinada para a simulação, é possível escolher o portfólio desejado a partir da alavancagem e da vol do sistema. Para a simulação realizada se considera um modelo com 40% do ativo livre de risco e 60% ativos de risco, com alavancagem esperada de 1,477.

A escolha do valor de 40% do ativo livre de risco é baseado na seleção de um portfólio com no máximo 50% de alavancagem pelo critério de Kelly, procurando uma alavancagem próxima desse valor, para o modelo estudado.

Ativos	**Concentração**
IBOV	14,89%
SPX	21,30%
OZ1D	23,81%
ATIVO LIVRE DE RISCO	40,00%

Tabela 4.7: Distribuição Portfólio

A tabela 4.7 apresenta a concentração de cada um dos ativos na carteira. Com esses valores determinados, o modelo participa de uma análise essencial. Verificar primeiramente o comportamento dessa carteira em períodos anteriores. Em seguida, é necessário estudar a correlação do ativos na simulação realizada e o risco retorno presente para cada ativo. Por último, um estudo de risco baseado no modelo de Monte Carlo e na teoria de variância-covariância, é realizado para apresentar uma verificação de risco no portfólio descrito.

4.4.1 Análise Histórica

Para realizar a análise histórica do modelo obtido com o Portfólio de Markowitz alterado, pela variância, calcula-se o retorno de cada um dos dias da carteira de investimento com o modelo de alavancagem e adição de caixa inseridos.

Para determinar o modelo, primeiramente multiplica-se o valor da alavancagem pelo retorno diário percentual de cada ativo. Em seguida, o peso de cada ativo, obtido de forma eficiente pelo modelo, é distribuído na multiplicação e somado para obter o retorno desse portfólio, baseado no modelo de Markowitz ajustado. Para finalizar, esse portfólio é multiplicado por (1-concentração de ativo livre de risco desejada), somado com o retorno diário do ativo livre de risco, que é igual a 0,0079%. Assim, o retorno do portfólio é determinado. Para descobrir o retorno acumulado basta realizar uma iteração baseada na fórmula:

$$R_a[i] = R_a[i-1] * (\text{Retorno}_p + 1). \tag{4.4}$$

O parâmetro i é o valor de cada um dos dias de análise, R_a é o valor do retorno acumulado procurado em cada um dos i intervalos de análise, Retorno_p é o retorno diário percentual do portfólio obtido depois de todo o processo.

O valor da carteira obtida, para a simulação no período de Janeiro de 2010 até Dezembro de 2019, é retratada na figura 4.7. Os ativos mantém a mesma concentração de cada ativo no portfólio durante toda a análise. Independente da evolução do investimento selecionado, sua concentração se mantém, segundo as concentrações previamente determinadas. Seu valor é comparado com o retorno acumulado do Ibovespa que seria o benchmark desejado de estudo.

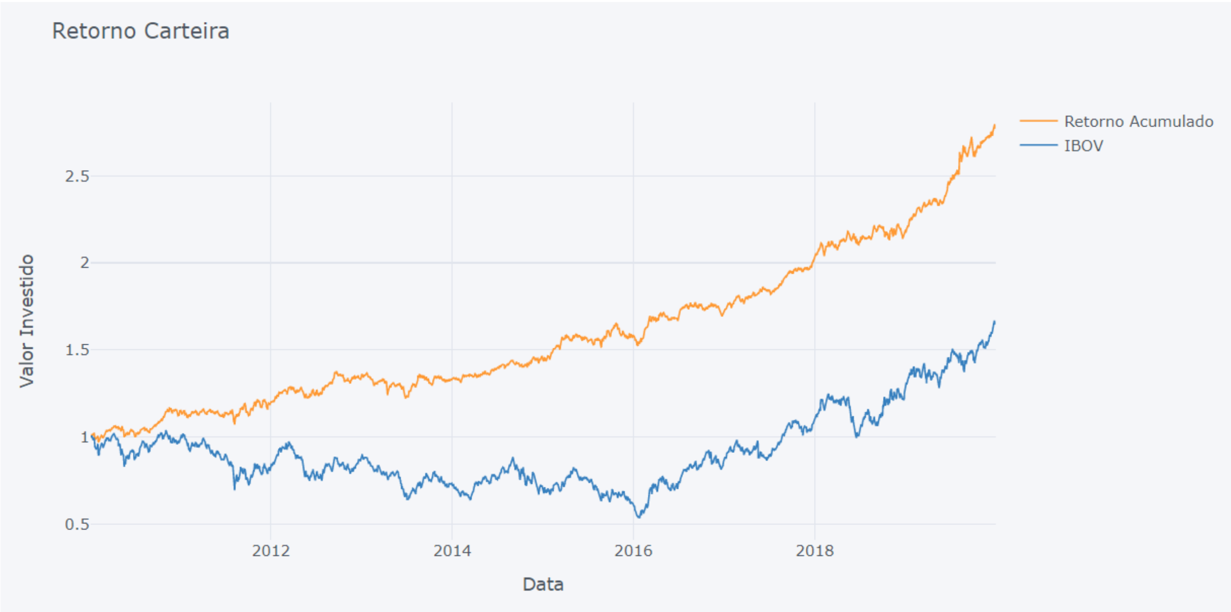


Figura 4.7: Resposta da Carteira Obtida

A curva laranja representa o retorno do portfólio estudado e a curva azul o retorno do Ibov, durante o período de 10 anos. Os dois gráficos partem do valor 1 como se fosse o multiplicador do seu patrimônio e as curvas vão apresentando diferentes caminhos, de acordo com a rentabilidade de seus portfólios.

É possível perceber que a carteira obtida apresentou uma rentabilidade muito melhor do que a do índice, mesmo sem a utilização do rebalanceamento do sistema. O índice brasileiro andou de forma um pouco lateralizada no período de estudo. Boa parte dessa lateralização vem da alta taxa de juros que o país apresentava no período. O investidor não precisava correr risco para obter boa rentabilidade, assim não compensava o investimento em ativos de risco.

Boa parte dos investidores no período indicado não conhecia direito o funcionamento do mercado financeiro brasileiro, essa demanda não era necessária para boa parte dos investidores, pois uma aplicação na poupança já apresentava boa rentabilidade.

No ano de 2020, a taxa de juros brasileiro bateu a mínima histórica e, assim, o número de CPFs na bolsa aumentou e as perspectivas de crescimento do índice, após a pandemia do COVID 19 é bem expressiva.

Uma outra possibilidade é a migração de capital estrangeiro para o país, caso o clima de tensão política diminua internamento com a aprovação das possíveis reformas(fiscais, tributárias, previdência). Com essa melhora, o modelo tende a apresentar uma maior concentração futura nesse índice.

A carteira apresentada possui boa concentração de ouro, um ativo que teve excelente rentabilidade no período, a crise do corona vírus não foi utilizada na análise, onde o ativo atingiu sua máxima histórica, com uma excelente rentabilidade. A alavancagem de capital propiciou uma melhora expressiva na rentabilidade, a carteira não alavancada possuia 2,3x de retorno no período.

A simulação não considera a variação da taxa livre de risco no período, que poderia potencializar ainda mais o retorno da carteira apresentada, pois nos anos anteriores sua taxa era bem mais alta, na faixa de 2 dígitos.

Outra análise interessante é verificar a efetividade do critério de Kelly no modelo proposto. A figura 4.8 mostra que a carteira alavancada elevou o ganho do investimento em mais de 35% ao final do prazo estipulado. A carteira alavancada chegou ao final do período com 2,855 vezes de ganho na aplicação financeira e a carteira não alavancada 2,11 vezes. Ambas as carteiras apresentaram um retorno muito mais elevado que o benchmark proposto.

O máximo drawdown da carteira sugerida ocorreu no período de 21 de setembro de 2012 até 27 de junho de 2013 com 7,96% de drawdown no período.

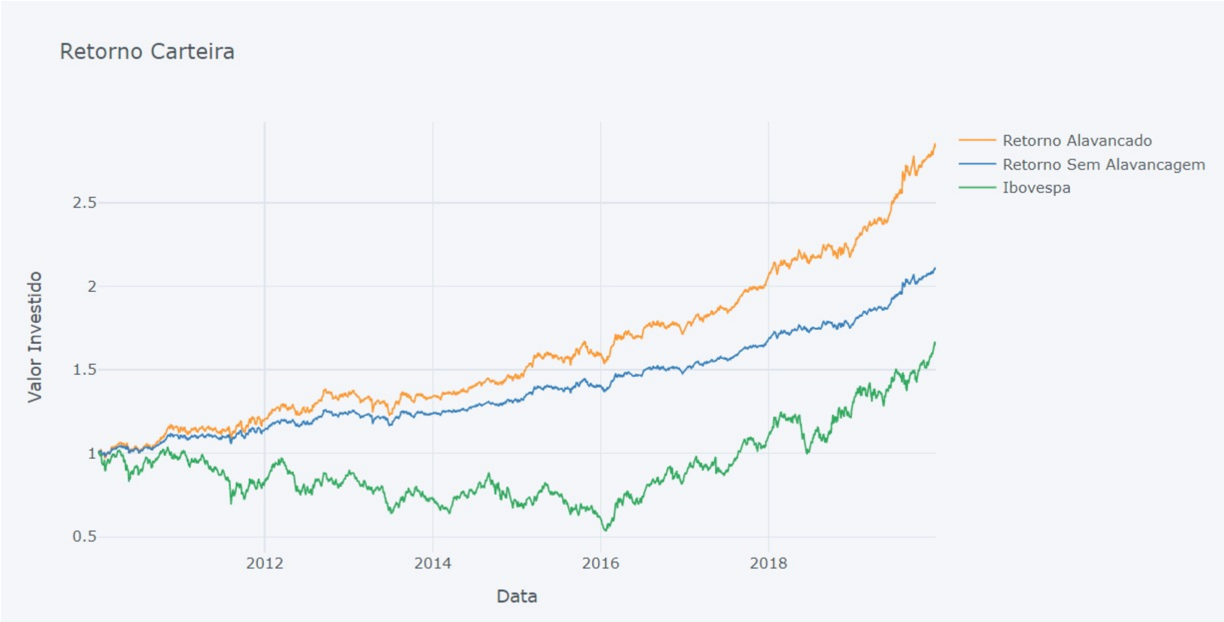


Figura 4.8: Comparação de Retorno da Alavancagem de Kelly

Os resultados mostram que, por mais que a volatilidade da carteira alavancada seja maior, ao final do prazo previamente estabelecido a alavancagem financeira foi essencial para melhorar o retorno de seus investimentos. Assim, com um controle de risco bem efetuado, a alavancagem financeira é essencial para melhorar o retorno de seus investimentos.

4.4.2 Risco Retorno

Uma das análises necessárias para o modelo apresentado é verificar o comportamento de risco e retorno de cada um dos ativos da carteira. Essa verificação é essencial para discutir, como cada ativo do sistema influenciou na curva de retorno acumulado. Por mais que o objetivo do projeto não seja utilizar as medidas passadas para o sistema, é essencial entender como o sistema foi interferindo na análise histórica por cada um dos ativos.

A seguir é possível verificar como cada um dos ativos do sistema possui sua relação risco/retorno durante o período estudado. A alavancagem foi incluída em cada um dos ativos e a correção pela variância, baseada no modelo A(1,0), foi realizada no retorno de cada ativo individualmente.

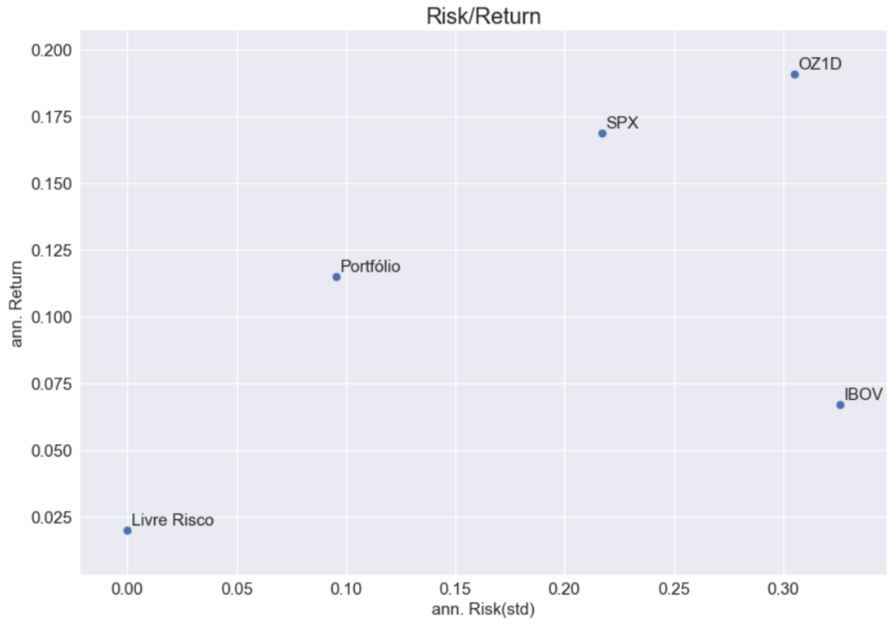


Figura 4.9: Risco Retorno dos Ativos

A explicação para o baixo retorno do IBOV e para sua alta volatilidade foi apresentada em 4.4.1. O SP500 mantém boa constância em seus retornos, devido a sua forte representação no mercado internacional. O ouro possui alta rentabilidade no período, além do ativo ser dolarizado, e que cresceu de forma esporádica entre 2010 e 2019.

Um ponto muito interessante de ser analisado é que por mais que o retorno do Ouro seja muito alto, ele possui alta volatilidade. Assim, o portfólio obtido com alavancagem incluída pelo critério de Kelly possui a menor volatilidade, com um bom retorno, sendo que boa parte dessa baixa volatilidade vem da adição de caixa no sistema. O ativo livre de risco também é apresentado com um retorno de 2% somado a alavancagem e sua volatilidade é igual a 0.

4.4.3 Correlação

Os ativos foram escolhidos para que a correlação entre eles seja baixa, assim com ativos pouco correlacionados pode-se obter uma melhor relação risco-retorno. Em períodos de alta volatilidade, como o caso do ano de 2020, os principais índices dos países aumentam sua correlação, assim SP500 e IBOV possuem mais semelhança durante esses períodos.

Escolhendo ativos muito correlacionados, a vantagem da diversicação de uma carteira acaba por não ser tão necessária. Alguns ativos com correlação negativa são úteis, pois caso em períodos de crise em que um ativo caia muito, o outro sobe. A correlação entre os ativos do portfólio é mostrado na figura 4.10.

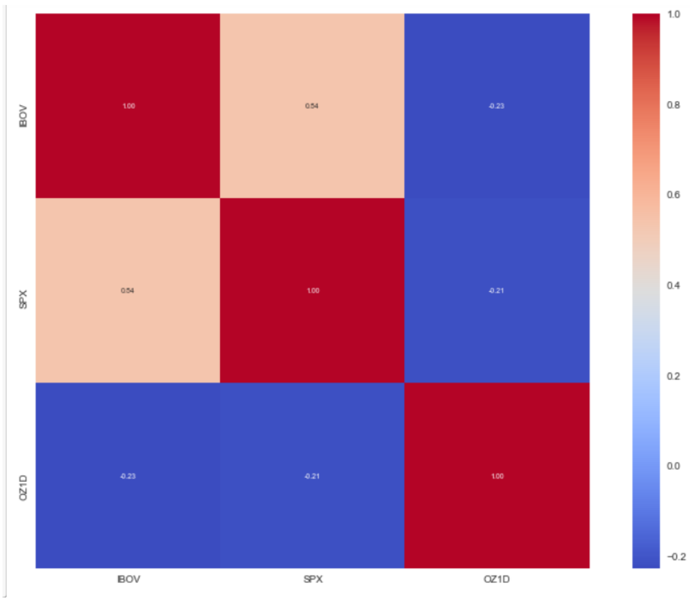


Figura 4.10: Correlação entre os ativos

A figura nos permite mostrar que a correlação entre todos os ativos do portfólio é baixa e, para o caso do ouro e das outras bolsas ainda é negativa. Uma das explicações para esse valor é que o investidor quando está inseguro com o mercado, normalmente migra seu capital para o investimento em ouro, que é um ativo considerado raro e escasso.

A pandemia e a crise de 29 nos mostrou que em períodos de altíssima volatilidade e receio por parte dos investidores, as principais bolsas de valores perdem valor de capital e existe uma intensa migração para o ouro, tornando os ativos mais negativamente correlacionados nesse período.

4.4.4 Análise de Risco

4.4.4.1 Var-Covar

Para analisar os riscos dos investimentos primeiramente se utilizou o modelo de variância-covariância, para prever o máximo de capital perdido por um investimento em determinado período de análise e com certo nível de confiança, normalmente com valor entre 0,9,0,95 e 0,99.

A fórmula para cálculo do sistema é apresentado na seção 2.9 e diferentemente do modelo apresentado, o risco utilizado foi baseado na média ajustada pela variância com o modelo A(1,0). A volatilidade manteve a mesma forma de análise.

A tabela a seguir apresenta cada uma das possíveis perdas de capital para os 3 níveis de confiança no modelo de 1 e 30 dias com um patrimônio do investidor de R$ 1.000000,00

	1	30
0,9	R$ 7.290,45	R$ 29.295,41
0,95	R$ 9.478,85	R$ 41.282,92
0,99	R$ 13.584,82	R$ 63.769,85

É importante frisar que o modelo não considera os momentos de alta volatilidade e assim, o valor mais alto de perda no período de 30 dias para o nível mais alto de confiança foi de aproximadamente 6,4% e, para 1 dia, foi de aproximadamente 1,35%.

Essa análise é essencial para apresentar ao investidor externo uma boa previsão de quanto dinheiro ele pode perder nesse investimento, com um valor de capital aplicado em determinado período, principalmente para os investidores que apresentam menor educação financeira e possuem perfil mais conservador.

O baixo valor de perda nesse período também se deve pelo maior investimento em ativos livre de risco e baixa alavancagem pela utilização de apenas 1/4 do critério de Kelly.

Vale frisar que o modelo apresentado segue distribuição normal e boa parte dos ativos não segue esse tipo de distribuição. Assim, essa estratégia não deve ser seguida de forma exclusiva e deve ser tomada apenas como uma aproximação esperada de perda, segundo determinado critério.

4.4.4.2 Monte Carlo

O modelo de Monte Carlo, baseado no movimento Browniano, foi realizado com o retorno calculado a partir do modelo logaritmo, com o retorno diário do portfólio e, em seguida, a média do logaritmo é apresentada. No caso do movimento Browniano, o drift já é ajustado pela variância do sistema, assim o retorno μ pode se utilizar do modelo aritmético de retorno.

A fórmula que descreve o modelo é apresentada na seção 2.8.6. O modelo de Monte Carlo para um dia de investimento não é tão necessário, pois o essencial de Monte Carlo é estudar o comportamento normal de cada uma das curvas de interação. Logo, um dia de dado não seria possível plotar uma curva. A figura 4.11 apresenta 200 diferentes simulações do portfólio preditivo para 30 dias.

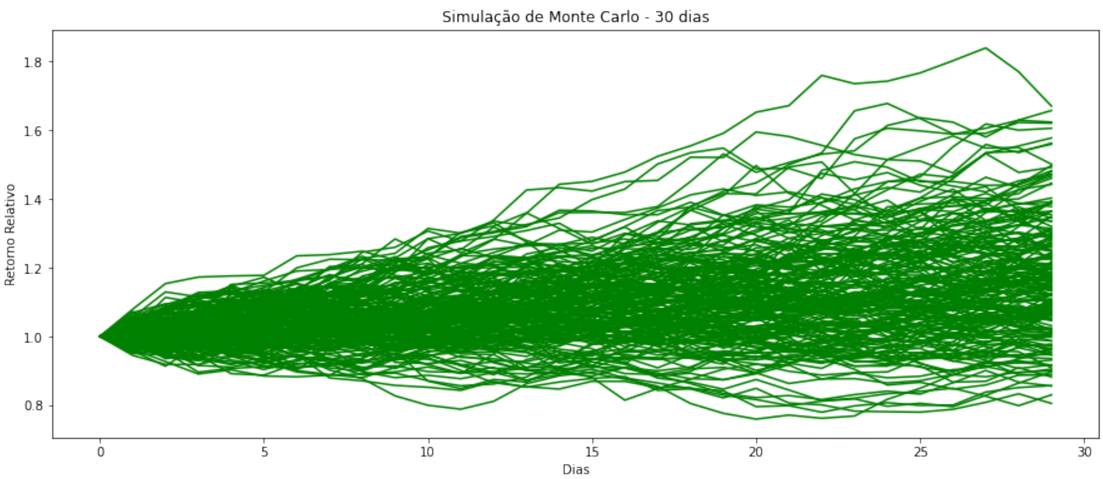


Figura 4.11: Simulação de Monte Carlo 30 dias

Pelas curvas do modelo de Monte Carlo é possível apresentar uma previsão de risco para diferentes níveis de volatilidade. O modelo de Monte Carlo apresentado aproximou a perda máxima de até 7%, na pior perspectiva para 200 diferentes curvas. Seu modelo se aproximou muito do risco obtido para a apresentação do Var-Covar com 99% de confiança. A vantagem do Monte Carlo é a possibilidade de informar uma previsão de retorno máximo com o modelo apresentado. Nesse modelo, um ganho máximo é de aproximadamente 10%.

Quanto maior o período de análise, maior a chance do modelo de Monte Carlo acertar o modelo de previsão com alguma das curvas. Contudo, a variação de retorno é muito alta para um período longo de tempo e assim, a análise máxima para o modelo de Monte Carlo foi de 252 dias, para apresentar uma previsão mais próxima da realidade com menor variação entre o retorno dos modelos de máximo e mínimo. A curva para o modelo de Monte Carlo para 252 dias é apresentada na figura 4.12.

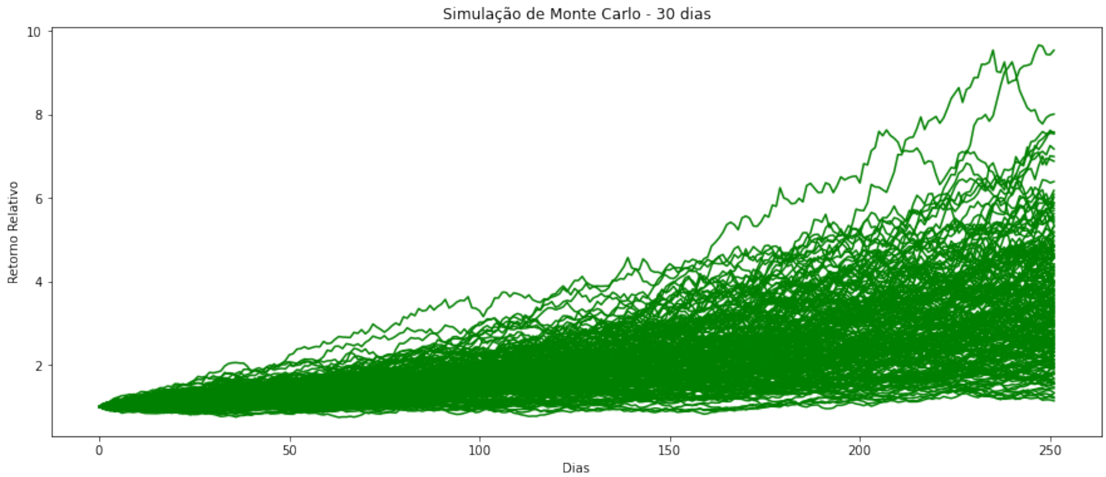


Figura 4.12: Simulação de Monte Carlo 252 dias

A simulação apresenta uma curva com baixo potencial de perda anual de, no máximo, 10,00% do seu capital e seu ganho máximo é de, aproximadamente, 13,5%. Mostrando uma boa análise de risco para essa simulação.

4.4.5 Discussão sobre Resultados

O resultado de risco mostrou um portfólio que se comportou de boa forma no período considerado passando nos principais testes de risco e apresentando um bom backtesting em seu investimento e assim, a aplicação poderia ser feita com as especificações dadas pelo sistema. O sistema apresentou um bom resultado e a aplicação do modelo de rebalanceamento ainda poderia ajudar ainda mais nessa rentabilidade.

Capítulo 5

Conclusões

O objetivo do presente trabalho consistiu em realizar uma análise do método tradicional de Markowitz para otimização de portfólios, bem como propor uma nova estratégia que permitisse melhor aproximar a estimativa de retorno de um portfólio, constituído por diferentes ativos de risco. As diferentes análises realizadas permitiram concluir que o modelo de Markowitz apresenta algumas inconsistências em sua análise.

Dos principais pontos de divergência com o resultado real que foram observados, vale citar a sua tendência a superestimar os resultados, que é decorrente do fato de ser utilizada uma aproximação pelo retorno através da média aritmética dos retornos individuais.

Essa diferença torna-se bastante evidente ao se analisar os resultados dos demais modelos propostos baseados na equação (2.7), que apresentam uma aproximação consideravelmente melhor, pelo fato de utilizarem um modelo ajustado pela volatilidade dos ativos.

A partir desse resultado, que demonstra que o modelo de Markowitz apresenta algumas ineficiências passíveis de correção, utilizou-se o modelo baseado na equação (α, β) e ferramentas preditivas para obter um portfólio otimizado para as estimativas de retorno utilizadas para cada ativo.

Em suma, a diferença efetiva com relação ao modelo de Markowitz baseia-se em dois pilares principais. O primeiro é na metodologia de cálculo do retorno, que no modelo proposto é feita através de uma média aritmética ajustada pela volatilidade, enquanto Markowitz utiliza apenas a média aritmética. O segundo ponto de diferença consiste nas aplicações futuras dos resultados obtidos em primeira análise, visto que esse trabalho propõe uma técnica de predição para a rentabilidade futura dos ativos, em vez de utilizar o resultado histórico, como é feito por Markowitz.

A partir do resultado obtido é possível concluir que as diferenças entre os modelos propostos e o de Markowitz resultam em resultados bastante díspares, em uma otimização pensando em resultados futuros.

Ademais, foram realizadas análises posteriores sobre o portfólio ótimo previamente obtido, de modo a testar sua eficiência diante de desenvolvimentos aleatórios, o que foi feito através de uma simulação de Monte Carlo. O resultado da simulação permitiu observar que o modelo é eficiente, tendendo a superar o tradicional benchmark de ambientes de renda variável, como o Ibovespa.

Um ponto interessante a ser debatido em trabalhos futuros é uma análise mais criteriosa acerca do tempo de rebalanceamento dos ativos dentro do portfólio. Como posto, essa é uma ferramenta importante para otimizar os retornos no longo prazo, atribuindo consideráveis ganhos ao resultado final. É válido, por exemplo, analisar uma equação que quantifique esse ganho para diferentes períodos utilizados.

Outro tópico deixado para futuras discussões é um estudo com relação às vantagens e desvantagens de ter mais ou menos ativos dentro do portfólio. Observa-se que a utilização de uma maior quantidade de ativos, pode ter impactos consideráveis no resultado, caso os ativos tenham baixa correlação.

Para facilitar o fornecimento dos dados e otimizar ainda mais a aplicação da estratégia é essencial a confecção de um modelo de data scraping, para automaticamente buscar os dados do terminal web e em seguida, realizar a simulação apresentada no artigo. É essencial modelar, também, uma forma de extrair os dados obtidos pela linguagem python e interligá-lo diretamente ao terminal da corretora.

Recomenda-se também uma análise acerca de outros estimadores para retornos futuros, que sejam mais complexos. O presente trabalho propôs-se a realizar um estudo mais objetivo nesse assunto, deixando espaço para aprimoramentos posteriores.

Por fim, por mais que seja complicado realizar um backtesting no modelo devido à alta frequência de mudança dos indicadores, é essencial que exista um mecanismo para analisar a rentabilidade da carteira de investimentos em períodos adversos, com as alterações periódicas de 7 dias.

Depois do backtesting construído, é necessário que um capital pequeno seja reservado para operação da estratégia por um período de aproximadamente 6 meses e, ao seu fim, ser possível utilizar esse sistema para fins comerciais.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

[1] C. F. Institute, "Capital asset pricing model (capm): A method for calculating the required rate of return, discount rate or cost of capital," Available at https://corporatefinanceinstitute.com/resources/knowledge/finance/what-is-capm-formula/ (2020/11/23.

[2] C. Colby Davis, "The line between agressive and crazy," Available at https://rhsfinancial.com/2017/06/20/line-aggressive-crazy-leverage/ (2017/06/20.

[3] H. M. Markowitz, "Portfolio selection," *Journal of Finance*, vol. 3, no. 1, 1952.

[4] J. von Neumann and O. Morgenstern, *Theory of Games and Economic Behavior*, 60th ed. Princeton, Oxford: Princeton University Press, 1944.

[5] W. J. Bernstein and D. Wilkinson, "Diversification, rebalancing and the geometric mean frontier," Available at https://ssrn.com/abstract=53503 (1997/11/24).

[6] H. A. Latane, "Criteria for choice among risky ventures," *Journal of Political Economy*, 1959.

[7] MacBeth and J. D., "What's the long-term expected return to your portfolio," *Financial Analyst Journal*, 1995.

ANEXOS

I. ANÁLISE EM 2020

Nesse anexo será realizada a análise previamente feita levando agora em consideração o ano de 2020. Ao longo das próximas páginas, serão avaliados os efeitos da pandemia do coronavírus na estratégia proposta nesse trabalho e observados os resultados.

I.1 Introdução

O escopo inicial do presente trabalho restringia-se a analisar os resultados para os ativos IBOV, SPX e OZ1D até o final do ano de 2019. No entanto, o ano de 2020 foi altamente atípico e apresentou desvios consideráveis em relação aos anos anteriores. De tal modo, o presente anexo propõe-se a expandir o espectro de análise do estudo para incluir o ano de 2020. Objetiva-se, assim, observar o comportamento do modelo de predição proposto em cenários de volatilidade acima da média.

A estratégia proposta é a mesma que a descrita anteriormente. Assim, os mesmos passos serão tomados ao longo da análise, com o período de observação passando a ser entre 01/01/2010 (primeiro de janeiro de dois mil e dez) e 31/12/2020 (trinta e um de dezembro de dois mil e vinte).

I.2 Otimização com Base em Dados Históricos

Após a inserção dos dados de 2020 na análise, obtivemos significativas diferenças em termos de retorno e volatilidade anualizadas dos ativos. A tabela I.1 abaixo demonstra as médias aritméticas e geométricas de retorno dos ativos, e a volatilidade de cada um no período de análise, que passa a ser entre 01/01/2010 (primeiro de janeiro de dois mil e dez) e 31/12/2020 (trinta e um de dezembro de dois mil e vinte). Os valores apresentados são anualizados.

Ativo	Retorno Aritmético	Retorno Geométrico	Volatilidade
IBOV	8,76%	5,23%	25,59%
SPX	13,97%	12,15%	17,90%
OZ1D	19,85%	16,96%	22,10%

Tabela I.1: Retornos e volatilidades dos ativos

Nota-se aqui um ponto interessante. Apesar da forte queda e volatilidade provocadas pela crise do coronavírus, todos os ativos em análise encerraram o ano de 2020 com variação positiva, o que se reflete em um retorno aritmético maior que anteriormente. No entanto, a maior volatilidade fez com que, no caso do IBOV, o retorno geométrico fosse ainda menor que antes, o que não ocorreu com o SPX e o OZ1D.

Simularam-se os portfólios com maior Sharpe e menor volatilidade para cada caso bem como a fronteira eficiente de cada modelo. A simulação foi realizada conforme previamente explicado, sendo a única diferença o período de análise.

As tabelas I.2 e I.3 abaixo mostram as distribuições do portfólio para cada ativo, bem como a rentabilidade, volatilidade e índice de Sharpe da carteira total, tomando como base os dados históricos de cada ativo.

Ativo	**Markowitz**	**A(1,0)**	**A(1,1)**	**G(1,0)**	**G(1,1)**
IBOV	0,00%	0,00%	0,00%	2,35%	1,77%
SPX	52,02%	52,39%	52,30%	49,96%	50,55%
OZ1D	47,98%	47,61%	47,70%	47,69%	47,68%
Retorno	16,79%	15,96%	16,09%	17,90%	17,72%
Volatilidade	12,73%	12,71%	12,71%	12,64%	12,66%
Sharpe	1,16	1,10	1,11	1,26	1,24

Tabela I.2: Distribuição dos ativos utilizando as estimativas de retorno - Máximo Sharpe

Ativo	**Markowitz**	**A(1,0)**	**A(1,1)**	**G(1,0)**	**G(1,1)**
IBOV	10,17%	10,17%	10,17%	10,17%	10,17%
SPX	48,37%	48,37%	48,37%	48,37%	48,37%
OZ1D	41,46%	41,46%	41,46%	41,46%	41,46%
Retorno	15,88%	15,11%	15,22%	17,23%	17,03%
Volatilidade	12,39%	12,39%	12,39%	12,39%	12,39%
Sharpe	1,12	1,06	1,07	1,23	1,21

Tabela I.3: Distribuição dos ativos utilizando as estimativas de retorno - Mínima Volatilidade

Aqui vale pontuar alguns detalhes. Nota-se que tivemos uma alocação marginalmente menor em IBOV para o portfólio com mínima volatilidade, o que pode ser atribuído a uma volatilidade consideravelmente maior do ativo ao longo de 2020. Ademais, observa-se que em ambos os casos há uma menor alocação em SPX correspondida por uma maior alocação em OZ1D. A justificativa para tal diferença reside no fato de que o OZ1D teve uma menor volatilidade ao longo de 2020, aliada a um retorno maior.

Abaixo, estão os gráficos das fronteiras eficientes para cada modelo analisado.

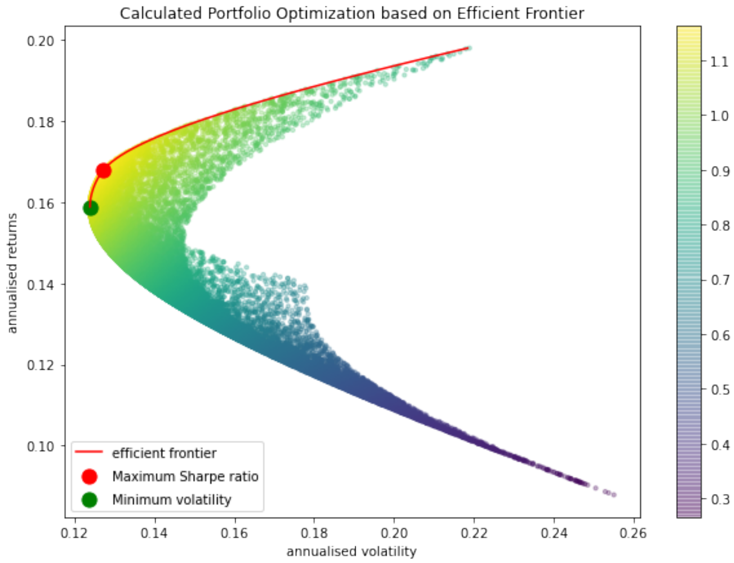
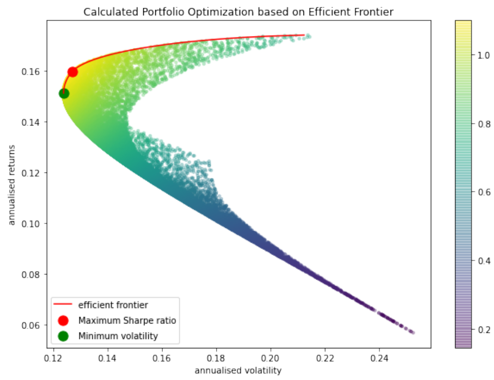
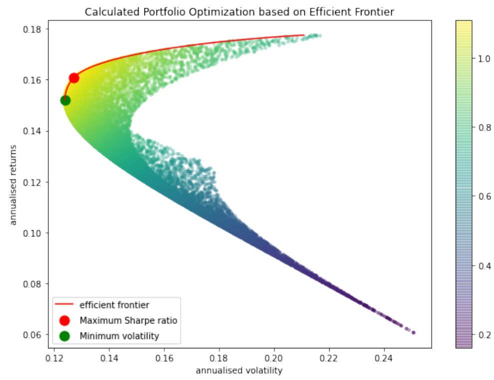


Figura I.1: Fronteira eficiente - Modelo de Markowitz

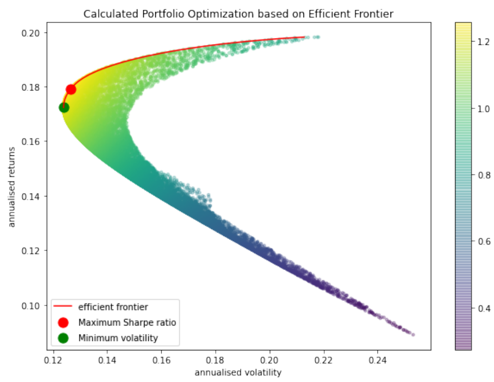
A figura I.1 mostra o resultado da simulação utilizando o modelo de retorno de Markowitz. Como esperado, uma das principais diferenças aqui demonstradas é uma maior expectativa de retorno, aliada a uma volatilidade também maior.



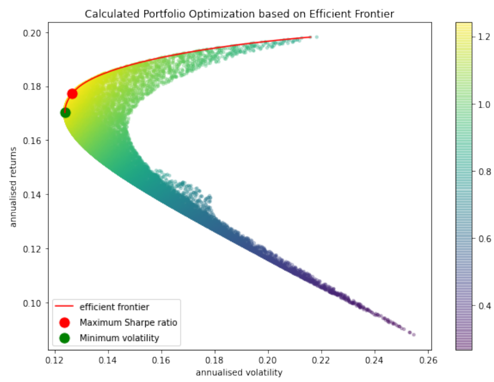
(a) Modelo A(1,0)



(b) Modelo A(1,1)



(c) Modelo G(1,0)



(d) Modelo G(1,1)

Figura I.2: Fronteiras eficientes dos modelos propostos

As figuras acima mostram os resultados das simulações para os modelos A(1,0), A(1,1), G(1,0), e G(1,1) propostos. Novamente, a principal diferença consiste em retornos menores do que o esperado pelo modelo de Markowitz.

II. TABELA RETORNO ATIVOS

Data	LTN	LFT	OURO	DÓLAR	IBOV
dez/19	0,57%	0,39%	3,61%	-5,13%	6,85%
nov/19	0,57%	0,40%	-3,07%	5,43%	0,95%
out/19	0,57%	0,50%	2,78%	-3,30%	2,36%
set/19	0,57%	0,49%	-3,53%	0,25%	3,57%
ago/19	0,57%	0,53%	6,20%	8,72%	-0,67%
jul/19	0,57%	0,59%	1,35%	-1,02%	0,84%
jun/19	0,57%	0,49%	7,20%	-1,80%	4,06%
mai/19	0,57%	0,57%	1,04%	0,03%	0,70%
abr/19	0,57%	0,54%	-0,77%	-0,08%	0,98%
mar/19	0,57%	0,49%	-2,13%	4,62%	-0,18%
fev/19	0,57%	0,52%	-0,63%	2,95%	-1,86%
jan/19	0,57%	0,57%	2,74%	-6,11%	10,82%
dez/18	0,57%	0,52%	4,21%	0,37%	-1,81%
nov/18	0,57%	0,52%	0,35%	3,89%	2,38%
out/18	0,57%	0,57%	1,54%	-8,08%	10,19%
set/18	0,57%	0,49%	-0,70%	-0,16%	3,48%
ago/18	0,57%	0,60%	-2,45%	7,97%	-3,21%
jul/18	0,57%	0,57%	-2,52%	-3,12%	8,88%
jun/18	0,57%	0,54%	-3,68%	4,13%	-5,20%
mai/18	0,57%	0,54%	-1,70%	6,17%	-10,87%
abr/18	0,57%	0,54%	-0,48%	6,11%	0,88%
mar/18	0,57%	0,56%	0,48%	1,81%	0,01%
fev/18	0,57%	0,49%	-1,40%	1,89%	0,52%
jan/18	0,57%	0,61%	3,41%	-3,82%	11,14%
dez/17	0,57%	0,57%	2,55%	1,22%	6,16%
nov/17	0,57%	0,60%	0,71%	0,00%	-3,15%
out/17	0,57%	0,68%	-0,73%	3,50%	0,02%
set/17	0,57%	0,67%	-2,23%	0,44%	4,88%
ago/17	0,57%	0,84%	3,57%	0,69%	7,46%
jul/17	0,57%	0,84%	2,03%	-5,47%	4,80%
jun/17	0,57%	0,85%	-2,56%	2,50%	0,30%
mai/17	0,57%	0,98%	0,10%	1,57%	-4,12%
abr/17	0,57%	0,83%	1,30%	1,71%	0,64%
mar/17	0,57%	1,11%	-0,34%	0,46%	-2,52%
fev/17	0,57%	0,91%	3,29%	-1,33%	3,08%
jan/17	0,57%	1,15%	4,64%	-3,19%	7,38%

dez/16	0,57%	1,19%	-0,31%	-3,83%	-2,71%
nov/16	0,57%	1,10%	-7,15%	6,11%	-4,65%
out/16	0,57%	1,11%	-2,68%	-2,18%	11,23%
set/16	0,57%	1,17%	0,18%	1,02%	0,80%
ago/16	0,57%	1,29%	-3,38%	-0,66%	1,03%
jul/16	0,57%	1,18%	2,96%	1,10%	11,22%
jun/16	0,57%	1,23%	8,33%	-11,01%	6,30%
mai/16	0,57%	1,18%	-5,37%	5,10%	-10,09%
abr/16	0,57%	1,12%	4,72%	-4,39%	7,70%
mar/16	0,57%	1,24%	0,60%	-10,54%	16,97%
fev/16	0,57%	1,07%	9,59%	0,46%	5,91%
jan/16	0,57%	1,13%	3,65%	0,96%	-6,79%
dez/15	0,57%	1,24%	-0,26%	2,37%	-3,92%
nov/15	0,57%	1,13%	-5,97%	0,33%	-1,63%
out/15	0,57%	1,18%	0,98%	-2,35%	1,80%
set/15	0,57%	1,18%	-2,74%	9,11%	-3,36%
ago/15	0,57%	1,19%	2,86%	5,79%	-8,33%
jul/15	0,57%	1,26%	-6,90%	10,25%	-4,17%
jun/15	0,57%	1,14%	-0,77%	-2,41%	0,61%
mai/15	0,57%	1,06%	0,60%	5,48%	-6,17%
abr/15	0,57%	1,02%	0,06%	-5,67%	9,93%
mar/15	0,57%	1,11%	-2,84%	12,57%	-0,84%
fev/15	0,57%	0,88%	-5,43%	5,84%	9,97%
jan/15	0,57%	1,00%	3,68%	0,94%	-6,20%
dez/14	0,57%	1,03%	13,63%	3,57%	-8,62%
nov/14	0,57%	0,90%	0,35%	3,53%	0,17%
out/14	0,57%	1,02%	-3,25%	1,32%	0,95%
set/14	0,57%	0,97%	-5,86%	9,40%	-11,70%
ago/14	0,57%	0,93%	0,35%	-1,23%	9,78%
jul/14	0,57%	1,02%	-3,06%	2,24%	5,01%
jun/14	0,57%	0,88%	6,12%	-1,17%	3,76%
mai/14	0,57%	0,93%	-3,86%	0,34%	-0,75%
abr/14	0,57%	0,88%	0,95%	-1,72%	2,40%
mar/14	0,57%	0,82%	-2,88%	-2,84%	7,05%
fev/14	0,57%	0,85%	6,56%	-3,08%	-1,14%
jan/14	0,57%	0,91%	3,18%	2,14%	-7,51%
dez/13	0,57%	0,85%	-3,89%	1,13%	-1,86%
nov/13	0,57%	0,77%	-5,52%	4,27%	-3,27%
out/13	0,57%	0,87%	-0,22%	1,08%	3,66%
set/13	0,57%	0,76%	-4,99%	-7,12%	4,65%

ago/13	0,57%	0,76%	6,38%	4,79%	3,68%
jul/13	0,57%	0,77%	7,24%	2,02%	1,64%
jun/13	0,57%	0,65%	-12,12%	4,19%	-11,31%
mai/13	0,57%	0,64%	-5,41%	7,02%	-4,30%
abr/13	0,57%	0,66%	-7,69%	-1,11%	-0,78%
mar/13	0,57%	0,59%	1,08%	2,22%	-1,87%
fev/13	0,57%	0,53%	-4,99%	-0,53%	-3,91%
jan/13	0,57%	0,64%	-0,85%	-2,82%	-1,95%
dez/12	0,57%	0,58%	-2,11%	-4,10%	6,05%
nov/12	0,57%	0,60%	-0,38%	5,18%	0,71%
out/12	0,57%	0,66%	-3,03%	0,26%	-3,56%
set/12	0,57%	0,59%	5,13%	-0,18%	3,71%
ago/12	0,57%	0,75%	4,60%	-1,33%	1,72%
jul/12	0,57%	0,74%	0,44%	2,35%	3,21%
jun/12	0,57%	0,70%	2,62%	-0,65%	-0,25%
mai/12	0,57%	0,80%	-6,06%	5,96%	-11,86%
abr/12	0,57%	0,77%	-0,35%	4,51%	-4,17%
mar/12	0,57%	0,89%	-2,37%	6,35%	-1,98%
fev/12	0,57%	0,82%	-1,61%	-1,71%	4,34%
jan/12	0,57%	0,97%	10,98%	-6,23%	11,13%
dez/11	0,57%	1,00%	-10,30%	3,04%	-0,21%
nov/11	0,57%	0,95%	1,24%	5,31%	-2,51%
out/11	0,57%	0,97%	6,41%	-8,61%	11,49%
set/11	0,57%	1,04%	-11,38%	18,24%	-7,38%
ago/11	0,57%	1,19%	12,30%	2,60%	-3,96%
jul/11	0,57%	1,07%	8,39%	-0,84%	-5,74%
jun/11	0,57%	1,06%	-2,19%	-1,13%	-3,43%
mai/11	0,57%	1,09%	-1,29%	0,16%	-2,29%
abr/11	0,57%	0,93%	8,14%	-3,34%	-3,58%
mar/11	0,57%	1,02%	2,10%	-1,91%	1,79%
fev/11	0,57%	0,94%	5,66%	-0,22%	1,21%
jan/11	0,57%	0,96%	-6,14%	0,48%	-3,94%
dez/10	0,57%	1,03%	2,61%	-3,23%	2,36%
nov/10	0,57%	0,90%	2,06%	0,81%	-4,20%
out/10	0,57%	0,90%	3,77%	0,81%	1,79%
set/10	0,57%	0,94%	4,77%	-3,84%	6,58%
ago/10	0,57%	0,99%	5,64%	0,06%	-3,51%
jul/10	0,57%	0,96%	-5,12%	-2,77%	10,80%
jun/10	0,57%	0,89%	2,75%	-0,88%	-3,35%
mai/10	0,57%	0,84%	2,72%	4,75%	-6,64%

abr/10	0,57%	0,75%	6,00%	-2,58%	-4,04%
mar/10	0,57%	0,85%	-0,45%	-1,31%	5,82%
fev/10	0,57%	0,67%	3,26%	-4,13%	1,68%
jan/10	0,57%	0,74%	-1,11%	8,15%	-4,65%

III. ARQUIVOS DAS SIMULAÇÕES

Os arquivos e códigos utilizados para fazer as simulações do presente trabalho encontram-se disponíveis no seguinte repositório do GitHub:

`https://github.com/lucas-la/TCC_Lucas_Pedro_UnB_2_2020.git`

Para utilizá-los, é necessário ter a linguagem de programação Python 3 instalada no computador, cujo último release está disponível em:

`https://www.python.org/download/releases/3.0/`